目　录

序言

第十六章 次正规算子

问　题

第一章　矢量与空间

1. 二次型的极限. 希耳伯特空间的研究中主要关心的对象倒不是空间里的矢量，而是它上面的算子．自称研究希耳伯特空间理论的大多数人实际上是研究算子理论．这是由于矢量的代数及几何，线性泛函，二次型，子空间之类的对象都比算子理论容易而且已经相当好地得到了解决．这些容易而且熟知的东西，某些是有用的，某些是有趣的，而且也许某些是两者兼备的．

开始时请先回忆，复矢量空间 $\mathbf{H}$ 上的双线性泛函有时被定义为 $\mathbf{H}$ 与其自身的笛卡儿乘积(空间)上的关于第一变元是线性的，关于第二变元是共轭线性的复值函数；见 Halmos[1951, 12页][注]．有些数学家，在这方面的论述或在其他一些更普遍的范围中，使用“半线性”代替“共轭线性”，还偶然用“型”代替“泛函”．因为在拉丁文中 sesqui 的意义是“一个半”，有人建议双线性泛函可以更精确地描述为一次半型(sesquilinear form)．

在 Halmos [1951, 12页] 中，二次型被定义为通过方程 $\varphi^{-}(f)=\varphi(f, f)$ 与一次半型 φ 相伴随的函数 φ^{-}(在那里，用记号 $\hat{\varphi}$ 代替 φ^{-})．说得更确切些，二次型是这样的一个函数 ψ，存在一

[注]　这里正文中引用的文献都见本书末的参考文献栏．——译者注

个一次半型φ使得$\psi(f)=\varphi(f,f)$. 这样的存在性定义，甚至使最简单的代数问题，诸如两二次型的和是否都是二次型(是)，以及两个二次型的积是否都是二次型(否)，也成为棘手的.

问题 **1**. *一个二次型序列的极限是否一个二次型?*

2. 线性泛函的表示. 黎斯表示定理说，对于希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的每一个有界线性泛函ξ必有 $\mathbf{H}$ 中一个矢量g与之相应，使得$\xi(f)=(f,g)$对一切f成立. 这个陈述是"不变"的或"与坐标无关的"，因此根据流行的数学规范，(该陈述的)证明也必然地是如此. 麻烦的是，与坐标最无关系的证明（就象 Halmos [1951, 32 页] 书中的那个证明)虽是那么漂亮，却掩蔽了事物的实质.

问题 **2**. *求黎斯表示定理的一个坐标化的证明.*

3. 严格凸性. 在实矢量空间中(因而，特别是在复矢量空间中)联结两矢量f和g的线段按定义就是形如$tf+(1-t)g$(此处$0\leqslant t\leqslant 1$)的矢量全体的集. 实矢量空间的子集是凸的，是指对于它所含有的任一对矢量说，它也含有联结它们的线段上的一切矢量. 凸性在现代矢量空间理论中起着日益重要的作用. 希耳伯特空间中已有那么丰富的其它更有力的结构，以致凸性对于它的作用，有时不如对于其它矢量空间的作用那样显而易见. 在希耳伯特空间中凸集的一个简易的例子是*单位球*，按定义，它就是满足$\|f\|\leqslant 1$的矢量f全体的集. 另一例子是*开单位球*，即满足$\|f\|<1$的矢量f全体的集.（可以把形容词"闭"字加于单位球，使与它的开的形式区别开来，但实际上这只在需要特别强调时才用到.）这些例子即使在一维(复)希耳伯特空间的极端情形也具有几何兴趣；这时它们分别约化为复平面上闭的和开的单位圆域.

如果$h=tf+(1-t)g$是联结f和g的线段上的一点，又若$0<t<1$(着重点是$t\neq 0$且$t\neq 1$)，那末h称为这线段的一个*内点*. 如果凸集的一点不是该集中任一线段的内点，它就称为该集的一个*端点*. 复平面中单位闭圆域的端点就是它的周界(单位圆)上的一切点. 复平面中单位开圆域没有端点. 满足$|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\leqslant 1$

的一切复数 z 的集是凸的(它由以 1, i, -1 和 $-i$ 为顶点的正方形的内点和界点组成); 这个凸集恰有四个端点(就是 1, i, -1 和 $-i$).

希耳伯特空间的一个闭凸集称为*严格凸的*如果它的一切界点都是端点. 这里所用的词"界点"具有通常的拓扑含义. 与凸性不同, 严格凸这个概念不单纯是代数的. 在希耳伯特空间以外的许多其他空间中, 它也是有意义的, 但要使得它有意义, 该空间必须有一个拓扑, 而且最好是与其线性结构恰当地联系起来的. 复平面中的单位闭圆域是严格凸的.

问题 3. *每一希耳伯特空间的单位球是严格凸的.*

叙述这个问题是要引起对一个范围内的思想的注意, 而且为后面的某些工作准备基础. 它并没有重大的内在的兴趣; 它是十分容易的.

4. 连续曲线. 一个无限维希耳伯特空间比它的外貌更为宽广; 展示出它的广袤性的一个动人的方法是去研究它里面的连续曲线. 希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 中的*连续曲线*是一个从单位闭区间到 $\mathbf{H}$ 的连续函数; 如果这函数是一对一的, 曲线便是*简单的*. 参数区间 $[a, b]$ 所确定的曲线 f 的*弦*就是矢量 $f(b)-f(a)$. 由区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 所确定的两弦称为*不相覆迭*是指区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 至多以一个端点为公共点. 如果两条不相覆迭的弦互相正交, 那么曲线在经过它们的最远离的端点间的一段时转过了一个直角. 如果一条曲线对于它的任一对不相覆迭的弦都是如此, 那末它就象是在每一点都突然转过一个直角, 因此, 特别地, 它在每一点都将没有切线.

问题 4. *对每一无穷维希耳伯特空间, 构造一个简单连续曲线使具有性质: 它的任意两条不相覆迭的弦互相正交.*

5. 线性维数. 对一个希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 说, 维数的概念可以有两种涵义. 由于 $\mathbf{H}$ 是一个矢量空间, 它有一个*线性维数*; 由于 $\mathbf{H}$ 还有一个内积结构, 它又有一个*正交维数*. 统一处理这两概念的一个途径是先证明 $\mathbf{H}$ 的所有基(basis)有共同的基数(cardinal

number)，然后把所有基的这个共同基数定义为 **H** 的维数；这两概念的区别在于基的定义. **H** 的 Hamel 基(也叫做线性基)指的是 **H** 的极大线性无关子集. (请记起，如果一个无穷集的每一有限子集都是线性无关的，这个无穷集便叫做线性无关的. 还有，每一矢量是任一 Hamel 基中有限个矢量的线性组合，但这一点对当前的目的说是不相干的.) **H** 的就范正交基是 **H** 的一个极大就范正交子集. (对线性理论说，有限项展开式的合适的类比是希耳伯特空间中常用的富里叶展开式).

问题 5. 是否存在着具有线性维数 $\aleph_0$ 的希耳伯特空间?

6. 无穷 Vandermonde 矩阵. 希耳伯特空间 l^2，按定义，是由使 $\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ 的复数序列 $\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$ 全体组成. 线性运算是逐坐标的[注]，而内积定义为

$$(\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle, \langle\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots\rangle)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\eta_n^*.$$

问题 6. 如果 $0<|\alpha|<1$，又如果

$$f_k=\langle 1, \alpha^k, \alpha^{2k}, \alpha^{3k}, \cdots\rangle, \quad k=1, 2, 3, \cdots,$$

试确定 f_k 全体组成的集在 l^2 中的张成空间. 推广(于其他矢量集合)并讨论(在有限维空间的)特殊情形.

7. 近似基.

问题 7. 如果 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 是希耳伯特空间 **H** 的一个就范正交基，又如果 $\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ 是 **H** 的一个就范正交子集，它使

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|e_j-f_j\|^2<\infty,$$

则诸向量 f_j 张成空间 **H**(因此形成 **H** 的一个就范正交基).

这是较难的. 有许多属于这一类型的问题；最初的一个明显地属于 Paley 和 Wiener. 有关的评述和详细参考文献，参看 Riesz-Nagy [1952, No. 86]. 上面的说法是 Birkhoff-Rota [1960]

[注] 指矢量相加或乘以一个数只须将各坐标对应相加或以该数乘各坐标. ——译者注

所论述.

8. 矢量和. 如果 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 是希耳伯特空间的正交子空间，则 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 是闭的(因此 $\mathbf{M}+\mathbf{N}=\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$). 正交性可能是一个太强的假定，但它保证了结论的成立. 某些条件总是必要的；如果不附加任何假定，则 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 不一定是闭的(参看 Halmos [1951, p. 28]，和下面的问题 41.)下面是在另一很强的但却是常常有用的假定下的结论.

问题 8. 如果 $\mathbf{M}$ 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个有限维线性流形，又如果 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个子空间(闭线性流形)，则矢量和 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 必须是闭的(因而等于张成空间 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$).

这个结果有一个推论(它也易于直接证明)，即每一有限维线性流形都是闭的；这只要令 $\mathbf{N}=\{0\}$ 即得.

9. 子空间格. 一个希耳伯特空间的一切子空间的集类是一个格. 这就是说，这个集类(依包含关系)是偏序的，而且它的任二元素 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 有一个最小上界或上确界(即张成空间 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$)和一个最大下界或下确界(即交 $\mathbf{M}\cap\mathbf{N}$). 如果下式(以适用于子空间格的记号表示)，

$$\mathbf{L}\cap(\mathbf{M}\vee\mathbf{N})=(\mathbf{L}\cap\mathbf{M})\vee(\mathbf{L}\cap\mathbf{N})$$

对任意的 $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ 成立，这个格就被称为*分配的*.

这个分配性条件可减弱为所谓模性的条件；一个格称为*模格*，如果上面所写的分配律至少当 $\mathbf{N}\subset\mathbf{L}$ 时成立. 此时自然有 $\mathbf{L}\cap\mathbf{N}=\mathbf{N}$，而上面的恒等式变成

$$\mathbf{L}\cap(\mathbf{M}\vee\mathbf{N})=(\mathbf{L}\cap\mathbf{M})\vee\mathbf{N}.$$

(仍在假设条件 $\mathbf{N}\subset\mathbf{L}$ 下成立.)

由于一个希耳伯特空间与任一同维数的希耳伯特空间在几何上是没有差异的，所以它的子空间格的模性和分配性很清楚地只与它的维数有关.

问题 9. 对哪一个基数 m 说，维数 m 的希耳伯特空间的子空间格是模格？是分配格？

10. 局部紧性与维数. 对希耳伯特空间说，许多整体的拓扑

问题易于答复，解答或则是简单的是或否，或则依赖于维数. 例如，每一希耳伯特空间是连通的，但是希耳伯特空间当且只当它是平凡的 0 维空间时才是紧的. 同类的问题可以倒过来提出：已知关于一个希耳伯特空间的维数的某些信息(例如，它是有限的)，求使如此的空间区别于一切其他维数的希耳伯特空间的拓扑性质. 这样的问题有时有有用且漂亮的解答.

问题 **10**. 希耳伯特空间当且只当它是有限维时是局部紧的.

11. 可分性与维数.

问题 **11**. 希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 当且只当 $\dim\mathbf{H}\leqslant\aleph_0$ 时是可分的.

12. 希耳伯特空间中的测度. 无限维希耳伯特空间恰当地被认为有限维欧氏空间的最成功的无限维推广. 在它们的代数和拓扑结构以外，有限维欧氏空间还具有测度；把它也推广到无限维空间去也许是很有用的. 为此已经做了各种不同的尝试(参看 Löwner[1939]和 Segal[1965]). 天真的愿望是寻求一个(最少)定义于波雷耳集全体所组成的集类(开集生成的 σ-体)上的可列可加集函数 μ，使对一切波雷耳集 M 有 $0\leqslant\mu(M)\leqslant\infty$. (提醒：上句的括号中波雷耳集的定义与 Halmos[1950b]中的不同). 为使 μ 适宜地与空间的其他结构联系起来，提出每一开集[注]有正测度且测度在平移下不变的要求是说得通的(第二个条件意指：对每一矢量 f 和每一波雷耳集 M 有 $\mu(f+M)=\mu(M)$). 如果现在"测度"一词就用以描述适合这些条件的集函数，那末下面的问题指明这个天真的愿望肯定是不能实现的.

问题 **12**. 对一个无穷维希耳伯特空间的每一测度说，任一非空球的测度是无穷大.

第二章 弱 拓 扑

13. 子空间的弱闭包. 希耳伯特空间是一个距离空间，而由

[注] 显然指非空开集. ——译者注

于此，它是一个拓扑空间．希耳伯特空间的距离拓扑(或范数拓扑)常称为*强拓扑*．强拓扑的基是开球的集合，也就是可表示如

$$\{f: \|f-f_0\|<\varepsilon\}$$

的子集全体，这里 f_0(中心)是一个矢量，ε(半径)是一个正数．

称为*弱拓扑*的另一拓扑在希耳伯特空间理论中有重要作用．弱拓扑的一个子基(不是一个基)是所有如下的集的集类

$$\{f: |(f-f_0, g_0)|<\varepsilon\}.$$

由此推知弱拓扑的基是可表为

$$\{f: |(f-f_0, g_i)|<\varepsilon, i=1, 2, \cdots, k\}$$

的子集全体的集类，这里 k 是一个正整数，f_0, g_1, $\cdots$, g_k 是矢量，而 ε 是一个正数．

有关这些拓扑的事实可以通过(文法上说)妥切地使用“弱”和“强”两词来描述．例如，一个函数可以说是弱连续的，或序列可以说是强收敛的；这些短语的意义该是很明显的．没有饰语的拓扑词汇都指强拓扑；这个惯例读者在前此各问题中已经见到了．

每当集合被赋予一个拓扑时，许多技术性问题就自动要求我们给予注意．(空间适合哪一个分离性公理？它是否紧的？是否连通的？)如果考察的是一大类集合(例如希耳伯特空间全体的类)，就发生分类问题．(哪一些是局部紧的，哪一些是可分的？)如果所说的集合(或许多集合)已经有某种结构，则应检查原有结构与新拓扑间的关联．(闭单位球是否紧的？内积是否连续？)最后，如果考虑的拓扑不止一个，那末必须搞清楚诸拓扑间的关系．(弱紧集是否强闭？)这类问题中的大多数，虽然是很自然的，而且事实上也是不可避免的，却可能不是那么令人感兴趣的，就因为这样，多数这类问题不见于下文．下文提到的问题都是通过某种(可能是主观的)检验证明它们是值得提出的，这些检验有如：有一个出人意外的答案；有一个微妙机巧的证明；或有一个重要的应用．

问题 13．*每一弱闭集是强闭的，但逆命题不真．虽然如此，希耳伯特空间的每一子空间(即每一强闭的线性集)是弱闭的．*

14．范数和内积的弱连续性． 对每一固定的矢量 g，函数 $f\rightarrow$

(f, g)弱连续；这在实用上就是弱拓扑的定义．（序列或网$\{f_n\}$弱收敛于f，当且只当对每一g有$(f_n, g)\to(f, g)$．）这一点加上内积的(共轭)对称性，蕴涵着对每一固定矢量f说，函数$g\to(f, g)$是弱连续的．关于$\langle f, g\rangle$和(f, g)的这两个断语说明，从序对$\langle f, g\rangle$到其内积(f, g)的映象对于其两变元中的每一变元说是分别地弱连续的．

很自然地会问：该映象是否对两变元一并地弱连续，易见答案是否定的．在解答13里已经见到一个反例；但在那里用于一个稍为不同的目的．如果$\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$是一个就范正交序列，则$e_n\to 0$（弱），但对一切$n$有$(e_n, e_n)=1$．本例同时指出，范数不是弱连续的．事实上可以这样说，弱收敛与强收敛间的唯一区别在于范数有可能是不连续的：一个弱收敛序列(或网)，只要范数是循规蹈矩的，就自动地成为强收敛的．

问题 14． *如果$f_n\to f$(弱)且$\|f_n\|\to\|f\|$，则$f_n\to f$(强)．*

15．弱可分性． 由于每一集的强闭包包含于其弱闭包中（参看解答13），可知如果一个希耳伯特空间是可分的(即强可分的)，它也是弱可分的．其逆如何？

问题 15． *是否每一个弱可分希耳伯特空间都是可分的？*

16．一致弱收敛性．

问题 16． *强收敛性同于在单位球面上一致弱收敛性．准确地说：$\|f_n-f\|\to 0$当且只当对$\|g\|=1$，(f_n, g)一致地收敛于(f, g)．*

17．单位球的弱紧性．

问题 17． *希耳伯特空间的闭单位球是弱紧的．*

这个结果有时被称为 Tychonoff-Alaoglu 定理．其难度不亚于其重要性．它是十分重要的．

18．单位球的弱可距离化性． 紧性是好的性质，但紧集而又可距离化，那就更好了．知道单位球是弱紧之后，接着自然要问，它是否也是弱可距离化的．

问题 18． *可分希耳伯特空间的单位球的弱拓扑是否可距离*

化的？

19．弱可距离化性与可分性．

问题 19．如果一个希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的单位球的弱拓扑是可距离化的，$\mathbf{H}$ 一定是可分的吗？

20．一致有界性． 著名的(对一切巴拿哈空间成立的)“一致有界性原理”断言：逐点有界的有界线性泛函的集是有界的，该断语的假设和结论可以用适于希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的术语表述如下．对 $\mathbf{H}$ 的一子集 $\mathbf{T}$ 说，逐点有界也可以叫做弱有界；其意指，对 $\mathbf{H}$ 中每一元 f，存在一个正常数 $\alpha(f)$ 使 $|(f, g)|\leqslant\alpha(f)$ 对 $\mathbf{T}$ 中一切元 g 成立．该断语的结论意指存在一个正常数 β，使 $|(f, g)|\leqslant\beta\|f\|$ 对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 和 $\mathbf{T}$ 中一切 g 成立；这个结论等价于 $\|g\|\leqslant\beta$ 对 $\mathbf{T}$ 中一切 g 成立．显然，希耳伯特空间的每一有界子集是弱有界的，一致有界性原理(对希耳伯特空间的矢量说)是其逆定理：每一弱有界集是有界的．一般原理的证明是一个稍为繁复的纲推理．Dunford-Schwartz[1958, p. 49]是一致有界原理的一般研究的一个标准参考文献．

问题 20．试求一个希耳伯特空间中一致有界性原理的初等证明．

(在这一段论述中，一个证明是“初等”的指它没有用到 Baire 的纲定理．)

一致有界性原理的一个常用推论是：弱收敛序列必有界．证明是完全初等的．由于收敛数列是有界的，易知弱收敛矢量序列是弱有界的．自然，此类断语对网不成立．关于序列的结果的一个浅易而有用的推广是：弱紧集必有界．理由：对每一 f，映象 $g\to(f, g)$ 把一个弱紧集中的所有 g 映成一个紧的因而是有界的数集，因此一个弱紧集是弱有界的．

21．希耳伯特空间的弱可距离化性． 前面的某些结果，尤其显著的是单位球的弱紧性和一致有界性原理，说明对有界集说，弱拓扑具有良好性质，对无界集说就不是如此．

问题 21．无穷维希耳伯特空间的弱拓扑不是可距离化的．

本题的最短证明是巧妙的.

22. l^2 上的线性泛函. 如果

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \rangle \in l^2 \text{ 且 } \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \rangle \in l^2,$$

则
$$\langle \alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \alpha_3\beta_3, \cdots \rangle \in l^1.$$

下面的断语是一个逆定理；它说的是，l^2 序列是仅有的这样的序列：它与每一 l^2 序列的积在 l^1 中.

问题 22. 如果当 $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$ 时必有 $\sum_n |\alpha_n\beta_n| < \infty$，则 $\sum_n |\beta_n|^2 < \infty$.

23. 弱完备性. 希耳伯特空间的矢量序列 $\{g_n\}$ 称为弱哥西序列，如果对空间中每一 f，数列 $\{(f, g_n)\}$ 是一个哥西序列（这个定义一定在意料中）. 弱哥西网可以完全一样地定义：只须把词"序列"都换成"网". 说一个希耳伯特空间或其一子集是弱完备的，意指它的每一弱哥西网有一（属于它的）弱极限. 如果只知道这个结论对序列成立，这个空间就叫做序列弱完备的.

问题 23. (a) 无穷维希耳伯特空间都不是弱完备的. (b) 哪些希耳伯特空间是序列弱完备的？

第三章 解析函数

24. 解析希耳伯特空间. 解析函数从几条途径进入希耳伯特空间，其作用之一是提供启发性例子. 构造这些例子的典型方法是考虑一个区域 D（"区域"指复平面的一个非空连通开子集），令 μ 表示 D 上的平面勒贝格测度而令 $\mathbf{A}^2(D)$ 表示在 D 内解析且关于 μ 平方可积的复值函数全体的集. 最重要的特例是 D 是一个开单位圆域，$D=\{z: |z|<1\}$；对应的函数空间将仅用 $\mathbf{A}^2$ 表示. 不论 D 是怎样的，集 $\mathbf{A}^2(D)$ 都是关于逐点的加法和数乘的矢量空间，它也是一个内积空间，其内积由下式定义：

$$(f, g) = \int_D f(z) g(z)^* \, d\mu(z).$$

问题 24. D 上平方可积解析函数空间 $\mathbf{A}^2(D)$ 本来就是一个希耳伯特空间，还是先要完备化才能成为希耳伯特空间？

25. $\mathbf{A}^2$ 的基.

问题 25. 如果 $e_n(z)=\sqrt{(n+1)/\pi}\,z^n$，其中 $|z|<1$ 而 $n=0, 1, 2, \cdots$，则这些 e_n 构成 $\mathbf{A}^2$ 的一个就范正交基，如果 $f\in\mathbf{A}^2$ 有泰劳级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，则 $\alpha_n=\sqrt{(n+1)/\pi}\,(f, e_n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$.

26. $\mathbf{H}^2$ 中的实函数. 除大小(维数)之外，希耳伯特空间相互之间是很相似的. 要使一个希耳伯特空间比它的近邻更有趣些，就必须用外加的结构来充实它. 例如，空间 $\mathbf{A}^2(D)$之所以有趣是由于它的元素的解析性质. 另一被称为 $\mathbf{H}^2$(此处 $\mathbf{H}$ 来自 Hardy)的重要希耳伯特空间，具有通常希耳伯特空间所未见的某些结构，它是如下定义的.

令 C 表示复平面的单位圆，$C=\{z:|z|=1\}$，且令 μ 表示 C 的波雷耳子集上的勒贝格测度(弧长的扩张)，但经过规范化使 $\mu(C)=1$(而非 $\mu(C)=2\pi$). 如果 $e_n(z)=z^n$，其中 $|z|=1(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，则由初等微积分知诸函数 e_n 构成 $\mathbf{L}^2(\mu)$的一个就范正交集；由标准的逼近定理(例如 Weierstrass 的多项式逼近定理)容易推知诸 e_n 构成 $\mathbf{L}^2$ 的一个就范正交基. (e_n 的有限线性组合称为三角多项式.) 依定义，空间 $\mathbf{H}^2$ 就是 $n\geqslant0$ 的诸 e_n 所张成的 $\mathbf{L}^2$ 的子空间；等价地说，$\mathbf{H}^2$ 也是 $\{e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}, \cdots\}$ 在 $\mathbf{L}^2$ 中的正交补空间. 一个与 $\mathbf{H}^2$ 相关联而起对偶作用的空间就是 $n\leqslant0$ 的诸 e_n 张成的子空间；它将记为 $\mathbf{H}^{2*}$.

依于就范正交基 $\{e_n:n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 的富里叶展开式形式上类似于解析函数理论中的罗朗展开式. 这种相似性启发我们称 $\mathbf{H}^2$ 中的函数为 $\mathbf{L}^2$ 中的解析元素；$\mathbf{H}^{2*}$ 中的元素则称为共轭解析的. $\mathbf{H}^2$ 有一个子集(线性子集但非子空间)在技巧上具有相当重要性，它就是 $\mathbf{H}^2$ 中的有界函数全体的集 $\mathbf{H}^\infty$；或等价地说，$\mathbf{H}^\infty$ 是 $\mathbf{L}^\infty$ 中这样的函数全体的集，对这些函数说，

$\int fe_n^* d\mu = 0(n=-1, -2, -3, \cdots)$. 类似地, $\mathbf{H}^1$ 是 $\mathbf{L}^1$ 中这样的函数全体的集,对这些函数说,同样的方程也都能成立. $\mathbf{H}^1$, $\mathbf{H}^2$ 和 $\mathbf{H}^\infty$ 所特有的风格来自非负整数半群在全体整数所成加群内的结构.

习惯上把象 $\mathbf{H}^1$, $\mathbf{H}^2$ 和 $\mathbf{H}^\infty$ 这一类空间中的元素说是函数,在前段中我们就遵从了这个习惯. 这个习惯不至于把使用者引入迷途, 只要随时都记住定语"几乎处处". 这样, "有界"指本性有界, 而类如"$f=0$"或"f 是实的"或"$|f|=1$"的一切陈述, 说它们是真的都应解释为几乎处处真的.

某些著者设法把 Hardy 空间定义成为真实的函数空间(由单位圆域上的解析函数组成). 用此方法(参看问题 28), "几乎处处"的困难仍然存在,但移于他处;它们表现于有关函数在边界上的极限性质的问题中(这些问题必然要被提出并要求回答).

不论用什么方法研究 $\mathbf{H}^2$ 中的函数, 总希望它们有类似于解析函数的性质. 下面的陈述显示了这一方向的迹象.

问题 26. *如果 f 是 $\mathbf{H}^2$ 中的一个实函数, 那末 f 是一个常数.*

27. $\mathbf{H}^2$ 中的乘积. 关于 Hardy 空间的最深刻的陈述都与它们的乘法结构有关. 下面的陈述是容易得到的一个样本.

问题 27. *$\mathbf{H}^2$ 中两函数的积属于 $\mathbf{H}^1$.*

该陈述的一种逆命题是真的: 每一 $\mathbf{H}^1$ 中的函数是 $\mathbf{H}^2$ 中两函数的积. (参看 Hoffman[1962, p. 52].)比起逆命题来, 正命题在希耳伯特空间理论中更为有用, 而且在正命题的证明中所用的技巧更接近于适宜于本书的(技巧).

28. $\mathbf{H}^2$ 的解析特征. 如果 $f\in\mathbf{H}^2$ 且具有富里叶展开式 $f=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$, 从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2 z^n$ 的收敛半径大或等于1. 由常见的以系数表示收敛半径的式子可推知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 定义一个开单位圆域内的解析函数 $\tilde{f}$, 映象 $f\to\tilde{f}$(显然是

线性的)建立起 $\mathbf{H}^2$ 与集 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 间的一一对应，$\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 表示在 D 内解析且其泰勒系数的级数平方可和的函数全体．

问题 28．如果 φ 是一个开单位圆域内的解析函数，$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，又若 $\varphi_r(z)=\varphi(rz)$，$0<r<1$ 且 $|z|=1$，则对每一 r 有 $\varphi_r\in\mathbf{H}^2$；级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2$ 收敛当且只当范数 $\|\varphi_r\|$ 有界．

许多著者把 $\mathbf{H}^2$ 定义成 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$；对他们来说，$\mathbf{H}^2$ 是由在单位圆域内泰勒级数平方可和的解析函数组成，或等价地说，由具有有界的"同心圆 $\mathbf{L}^2$ 范数"的解析函数组成．如果 φ 和 ψ 是两个这样的函数，$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 且 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$，则其内积 (φ,ψ) 定义为 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n^*$．鉴于 $\mathbf{H}^2$ 与 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 间存在着一一对应 $f\to\tilde{f}$，$\mathbf{H}^2$ 的这个定义和上面的定义实际上是一码事．如果 $f\in\mathbf{H}^2$，它在 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 中的象可以说是 f 向圆域内部的扩张(参看解答 32)．由于 $\mathbf{H}^\infty$ 包含于 $\mathbf{H}^2$ 中，这个概念对于 $\mathbf{H}^\infty$ 的元素也有意义，全体 $\mathbf{H}^\infty$ 的元素的扩张组成的集将以 $\widetilde{\mathbf{H}}^\infty$ 表示之．

29．函数希耳伯特空间． 有许多希耳伯特空间的常见例子被称为函数空间，而其实它们不是(函数空间)．如果一个测度空间有非空的测度为 0 的集(而通常正是这样)，则它上面的 $\mathbf{L}^2$ 空间不是由函数组成，而是由以测度为 0 的集为模的函数的等价类组成，而且没有用"代表元"来辨认这样的等价类的自然的方法．无论如何，确有一类希耳伯特空间的例子，它们的元素是真正的函数；它们将被称为函数希耳伯特空间．*一个函数希耳伯特空间*是一个(以非空)集 X 上的复值函数(为元素)的希耳伯特空间 $\mathbf{H}$；$\mathbf{H}$ 的希耳伯特空间结构通过两条途径(只有这两种可能的自然途径)与 X 相关联；即要求(1)如果 f, g 是 $\mathbf{H}$ 中元素而 α, β 是数量，则对 X 中每一 x，有 $(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$，就是说 $\mathbf{H}$ 上的计值泛函是线性的，以及(2) X 中的每一 x 对应着一个正常数 γ_x，使对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 有 $|f(x)|\leqslant\gamma_x\|f\|$，就是说，$\mathbf{H}$ 上的计值泛函是有界的．通常的序列空间(不论序列的长度是有限的或是无

限的)是函数希耳伯特空间的平凡的例子，角色 X 由下标集担任. 函数希耳伯特空间的更典型的例子是解析函数空间 $\mathbf{A}^2$ 和 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$.

有一种显易的方法可以把每一希耳伯特空间表示成一个函数希耳伯特空间. 已知 $\mathbf{H}$, 令 $X=\mathbf{H}$, 且令 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 表示 $X(=\mathbf{H})$上的有界共轭线性泛函全体. 存在着一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 的自然对应 $f\to\tilde{f}$: 对 X 中一切 g, $\tilde{f}(g)=(f, g)$. 据黎斯表示定理,这对应是一对一的; 由于(f, g)线性地依赖于 f, 这对应又是线性的. 作为定义,记$(\tilde{f}, \tilde{g})=(f, g)$(由此,特别有$\|\tilde{f}\|=\|f\|$); 可以推知 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 是一个希耳伯特空间. 由于$|\tilde{f}(g)|=|(f, g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|=\|\tilde{f}\|\cdot\|g\|$, 可知 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 是一个函数希耳伯特空间. $\mathbf{H}$ 和 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 间的对应 $f\to\tilde{f}$ 是一个希耳伯特空间同构.

问题 29. 给出以函数为元素的希耳伯特空间的一例, 其线性运算是逐点的, 但其计值泛函不都是有界的.

关于函数希耳伯特空间的一个早期但仍有用的参考文献是 Aronszajn[1950].

30. 核函数. 如果 $\mathbf{H}$ 是函数希耳伯特空间, 譬如是在 X 上的, 则 $\mathbf{H}$ 上的线性泛函 $f\to f(y)$ 对 X 中每一 y 是有界的, 因此,对 X 中每一 y, 存在 $\mathbf{H}$ 中一个元素 K_y, 使 $f(y)=(f, K_y)$ 对一切 f 成立. 由 $K(x, y)=K_y(x)$定义的 $X\times X$ 上的函数 K 叫做 $\mathbf{H}$ 的核函数或再生核.

问题 30. 如果 $\{e_j\}$ 是函数希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基, 则 $\mathbf{H}$ 的核函数 K 由下式给出:

$$K(x, y)=\sum_j e_j(x)e_j(y)^*.$$

$\mathbf{A}^2$ 和 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数是什么?

$\mathbf{A}^2$ 和 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数分别被称为 Bergman 核和 Szegö 核.

31. 扩张的连续性.

问题 31. 扩张映射 $f\to\tilde{f}$ (自 $\mathbf{H}^2$ 至 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$) 不但在希耳伯特空间的意义下, 而且在适宜于解析函数的意义下是连续的. 这就是

说：如果在 $\mathbf{H}^2$ 中 $f_n \to f$，则当 $|z|<1$ 时，$\tilde{f}_n(z) \to \tilde{f}(z)$，而且，事实上，在每一个圆域 $\{z: |z| \leqslant r\}$，$0<r<1$ 上收敛都是一致的。

32．径向极限．

问题 **32**．如果 $\mathbf{H}^2$ 的一个元素 f 在 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 中的对应解析函数 $\tilde{f}$ 是有界的，则 f 也是有界的（即 $f \in \mathbf{H}^\infty$）．

33．有界逼近．

问题 **33**．如果 $f \in \mathbf{H}^\infty$，是否可推知 $\tilde{f}$ 有界？

34．扩张的乘法性．

问题 **34**．映射 $f \to \tilde{f}$ 是否乘法的？

35．Dirichlet 问题．

问题 **35**．$\mathbf{L}^2$ 中每一实函数 u，有 $\mathbf{L}^2$ 中唯一的实函数 v 与之对应，使得 $(v, e_0)=0$ 且 $u+iv \in \mathbf{H}^2$．等价地说，$\mathbf{L}^2$ 中的每一 u[注]，有 $\mathbf{H}^2$ 中唯一的一个 f 与之对应，使 (f, e_0) 是实的，且 $\operatorname{Re} f = u$．

为了表达 u 与 v 间的这种关系，我们说它们是共轭函数；或换一种说法，v 是 u 的希耳伯特变换式．

第四章 无 穷 矩 阵

36．列有限矩阵． 有限维空间上的算子的许多问题可以借助矩阵来解决；矩阵把定性的几何陈述化约成明显的代数计算．矩阵理论中可以转移到无限维空间去的不多，能够转移过去的也不是那末有用，但它（矩阵理论）有时是有助益的．

假设 $\{e_j\}$ 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基．如果 A 是 $\mathbf{H}$ 上的一个算子，则每一 Ae_j 有一个富里叶展开式，

$$Ae_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i;$$

由是出现的矩阵，其元素由下式给出：

$$\alpha_{ij} = (Ae_j, e_i).$$

[注] 此处的 u 自然应设是实的．——译者注

这里的下标集是任意的，它不一定要由正整数组成．熟知的字眼(类如列、行、对角线)仍然可以按照它们熟知的意义来使用．注意：如果象通常那样，第一下标指行而第二下标指列，则矩阵可以这样构成：把 Ae_j 展开式中的系数写下来作为第 j 列．

从算子到(由某一固定的基诱导出的)矩阵的对应具有通常的代数性质．零矩阵和单位矩阵的意义毋用申述，矩阵的线性运算意义显然，伴(算子)对应于共轭转置，而算子乘法对应于由下列熟知的公式定义的矩阵乘积：

$$\gamma_{ij}=\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}.$$

这些和数不会引起收敛性的麻烦，有几种方法可以证明；今举其一．由于 $\alpha_{ik}=(e_k, A^*e_i)$，得知对于每一固定的 i，族 $\{\alpha_{ik}\}$ 是平方可和的；与此类似，由于 $\beta_{kj}=(Be_j, e_k)$，得知对于每一固定的 j，族 $\{\beta_{kj}\}$ 也是平方可和的．(通过 Schwarz 不等式得)结论：对固定的 i 和 j，族 $\{\alpha_{ik}\beta_{kj}\}$ 是(绝对)可和的．

由前段得知任一算子的矩阵的每一行和每一列都是平方可和的．这是矩阵由算子产生的必要条件；但不是充分条件(例：第 n 对角项是 n 的对角矩阵)．一个同类型的充分条件是(矩阵的)一切元素的族是平方可和的；这就是说，如果 $\sum_i\sum_j|\alpha_{ij}|^2<\infty$，则存在一个算子 A 使 $\alpha_{ij}=(Ae_j, e_i)$．(证明：对每一 i 和每一 f 有 $|\sum_j\alpha_{ij}(f, e_j)|^2\leqslant\sum_j|\alpha_{ij}|^2\cdot\|f\|^2$，由此得知 $\|\sum_i(\sum_j\alpha_{ij}(f, e_j))e_i\|^2\leqslant\sum_i\sum_j|\alpha_{ij}|^2\cdot\|f\|^2$．)这个条件不是必要的(例：单位矩阵)．还没有漂亮而适用的充要条件．用矩阵术语写出线性算子处处有定义而且有界的条件，当然是完全可能的，但其结果既不漂亮也不是适用的．这就是无限矩阵理论有别于有限(矩阵)理论的最明显特征：每一算子对应于一个矩阵，但不是每一矩阵都对应于一个算子，并且难于说清楚如何的矩阵才会(对应于算子)．

当有一个固定的基作为背景时，算子到矩阵的对应是一对一的；如果允许基变动，就可以使一个算子对应于许多矩阵．一个吸引人的游戏是去选择适当的基使(对应)矩阵成为尽可能简单的．

下面是一个典型的定理，虽然吸引人，却不象它看来那么有用。

问题 36. *每一算子有一个"列有限"矩阵，更准确地说，如果 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个算子，则存在 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基 $\{e_j\}$，使对每一 j，矩阵的元素 (Ae_j, e_i) 除对有限个 i 外都等于 0.*

参考：Toeplitz[1910].

37. Schur 定则. 无穷矩阵的代数多少是易于推理的，而它的分析却不是这样. 有关范数和谱的问题多半是难解的. 仅有的少数已知解答中，每一个都被认为是可贵的数学成就. 下述结果(实质上应属于 Schur)就是一例.

问题 37. *如果 $\alpha_{ij} \geqslant 0$ $(i, j=0, 1, 2, \cdots)$，$p_i > 0 (i=0, 1, 2, \cdots)$，又 β 和 γ 是正数使*

$$\sum_i \alpha_{ij} p_i \leqslant \beta p_j \quad (j=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\sum_j \alpha_{ij} p_j \leqslant \gamma p_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots),$$

则存在一个算子 A(自然是在一个可分无穷维希耳伯特空间上的)，它(关于一个适当的就范正交基)以 $\langle \alpha_{ij} \rangle$ 为矩阵且 $\|A\|^2 \leqslant \beta\gamma$.

有关参考文献和一个有联系的结果参看问题 135.

38. 希耳伯特矩阵.

问题 38. *存在一个(可分无穷维希耳伯特空间上的)算子 A，$\|A\| \leqslant \pi$ 且以 $\langle 1/(i+j+1) \rangle (i, j=0, 1, 2, \cdots)$ 为矩阵.*

该矩阵因希耳伯特而得名，矩阵的范数事实上等于 π(Hardy-Littlewood-Pólya [1934, p. 226]).

第五章 有界性与可逆性

39. 在基上的有界性. 有界性是一个有用且自然的条件，但对于线性变换说则是一个很强的条件. 这个条件在全部算子理论中，从最平易的代数性质到最复杂的拓扑性质，都有深远的影响.

为了避免某些明显错误，重要的是要知道，算子的有界性并不仅是给基的每一元素一个条件，然后把这无穷多个条件结合起来。如果 A 是具就范正交基 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 的希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的算子，则数列 $\|Ae_n\|$ 有界；例如 $\|A\|\leqslant 1$，则对一切 n，$\|Ae_n\|\leqslant 1$；而且如果 $A=0$，则对一切 n，当然有 $Ae_n=0$。刚才所说的明显错误就产生于假定这些断语的逆也是正确的。

问题 39. 试给出在基上有界的无界线性变换的一例；给出在基上以 1 为界但有任意大的范数的算子的例；给出在基上取值 0 的无界线性变换的一例。

40. 线性变换的一致有界性. 即使当一个希耳伯特空间上的算子占据着舞台中心时，有时两个希耳伯特空间间的线性变换也扮演一个角色。两空间的理论多是单空间理论的简单的改写。

设若 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 是希耳伯特空间，一个自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的线性变换 A 称为有界的，如果存在一个正数 α 使得对于 $\mathbf{H}$ 中一切 f 有 $\|Af\|\leqslant\alpha\|f\|$；$A$ 的范数，记为 $\|A\|$，就是如此的数值 α 的下确界。已给一个线性有界变换 A，当 f 属于 $\mathbf{H}$ 且 g 属于 $\mathbf{K}$ 时，内积 (Af,g) 有意义，它取于空间 $\mathbf{K}$ 中。对于固定的 g，这内积定义一个 f 的线性有界泛函，因而对于某一 $\mathbf{H}$ 中的 $\tilde{g}$，它恒等于 $(f, \tilde{g})$。从 g 到 $\tilde{g}$ 的映射称为 A 的伴随；它是一个从 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的线性有界变换 A^*。依定义，对任意 $f\in\mathbf{H}$ 和 $g\in\mathbf{K}$ 有

$$(Af, g)=(f, A^*g);$$

此处左边的内积取于 $\mathbf{K}$ 而右边的取于 $\mathbf{H}$。这一类伴随变换的代数性质可以如同经典的伴随算子一样地叙述并证明。有一个特别重要(但不难证明)的 A 与 A^* 间关联，就是 A 的值域的正交补空间等于 A^* 的核；由于 $A^{**}=A$，交换 A 与 A^* 后这断语仍旧成立。

这些代数命题都是显易不足道的，但将一致有界性原理从线性泛函推广到线性变换，则需要比较精细的分析。推广了的定理的陈述与特殊情形几乎完全一致：有界线性变换的逐点有界的集是一致有界的。逐点有界性假定可以用"弱"的形式也可以用"强"

的形式陈述. 一个(从 **H** 到 **K** 的)线性变换的集 **Q** 是弱有界的，如果对每一 **H** 中的 f 和每一 **K** 中的 g 存在一个正常数 $\alpha(f, g)$ 使得 $|(Af, g)| \leqslant \alpha(f, g)$ 对 **Q** 中一切 A 成立. 集 **Q** 是强有界的，如果对 **H** 中每一 f 存在一个正常数 $\beta(f)$ 使得 $|Af| \leqslant \beta(f)$ 对 **Q** 中一切 A 成立. 显然有定理：每一个有界集是强有界的，每一个强有界集是弱有界的. 线性算子的一致有界性定理是(该定理的)最好的可能的逆定理.

问题 40. 有界线性变换的每一个弱有界的集是有界的.

41. 可逆变换. 从一个希耳伯特空间 **H** 到一个希耳伯特空间 **K** 的有界线性变换是可逆的，如果存在一个(从 **K** 到 **H** 的)有界线性变换 B 使得 $AB=1$(= **K** 上的恒等算子)且 $BA=1$(= **H** 上的恒等算子). 如果 A 是可逆的，则 A 是 **H** 到 **K** 上的一一映射. 在纯集论的意义上，逆命题是真的：如果 A 一对一地把 **H** 映到 **K** 上，则存在唯一的自 **K** 到 **H** 的映射使得 $AA^{-1}=1$ 且 $A^{-1}A=1$；映射 A^{-1} 是线性的. 线性映射 A^{-1} 必定有界却不是那末明显的；读者自然可以设想，A 作为集论意义下的映射是可逆的，但作为线性变换则不是可逆的. 要保证 A^{-1} 具有有界性，惯常的做法是将 A 是一对一的条件加强. 合适的加强条件要求 A 是下有界的，就是说，存在一个正数 δ 使得对每一 $f \in \mathbf{H}$ 有 $\|Af\| \geqslant \delta\|f\|$. (验证下述事实是显易不足道的：如果 A 下有界，则 A 的确是一对一的.)如果这个条件被满足了，则其它条件(到 **K** "上")可以减弱：A 的值域等于 **K** 的要求可代以 A 的值域稠于 **K**. 总结：A 是可逆的当且只当它下有界且有稠值域(参看 Halmos[1951, p. 38]). 注意线性变换 A 与 A^* 将同时具有可逆性；如果它们是可逆的，则 A^{-1} 和 A^{*-1} 中的每一个是另一个的伴随.

在此值得稍离本题去讨论算子的值域非闭的可能性及其推论. 例如 A 由 $A\langle \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \rangle = \left\langle \xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots \right\rangle$ 定义于 l^2 上，则 A 的值域由

$$\text{满足} \sum_n n^2|\eta_n|^2<\infty \text{ 的矢量 } \langle\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots\rangle$$

全体组成. 由于这个值域包含一切有限(项)非零序列, 它稠于 l^2; 由于无论如何它不含有序列$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\rangle$, 它不是闭的. 另一例: 对于 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 中的 f, 定义 $(Af)(x)=xf(x)$. 这些算子自然不是下有界的; 如果它们下有界, 它们的值域就该是闭的了.

用值域非闭的算子可以给出一个十分简单的例子以说明两个子空间的矢量和可能非闭; 参看 Halmos[1951, p. 110]. 设 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个算子; 例子就构造在直接和 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 中. 令 $\mathbf{M}$ 表示"x 轴", 即(在 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 中)形如 $\langle f, 0\rangle$ 的矢量全体的集, 并令 $\mathbf{N}$ 表 A 的"图象", 即形如 $\langle f, Af\rangle$ 的矢量全体的集. $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 两者都是 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 的子空间, 其验证是不足道的. 什么时候 $\langle f, g\rangle$ 属于 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$? 答案是当且只当它具有形式 $\langle u, 0\rangle+\langle v, Av\rangle=\langle u+v, Av\rangle$; 由于 u 和 v 是随意的, $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 中的矢量具此形式当且只当它的第二坐标属于算子 A 的值域 $\mathbf{R}$(换句话说, $\mathbf{M}+\mathbf{N}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{R}$). $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 是闭的吗? 意即, 如果 $\langle f_n, g_n\rangle\to\langle f, g\rangle$, 其中 $f_n\in\mathbf{H}$ 而 $g_n\in\mathbf{R}$, 是否必有 $f\in\mathbf{H}$? (显然是), 是否必有 $g\in\mathbf{R}$? (可能不是). 结论: $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 闭于 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 当且只当 $\mathbf{R}$ 闭于 $\mathbf{H}$. 由于我们可以这样来选择 A, 使得 $\mathbf{R}$ 不是闭于 $\mathbf{H}$, 所以, 两个子空间的矢量和也就不一定都是闭的.

这些定理和例子似乎指明了集论意义的可逆性和算子意义的可逆性真的会有所区别; 但算子理论的最惬意和最有用的事实之一就是: 它们毕竟是完全一样的.

问题 41. 如果 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 是希耳伯特空间, 又如 A 是有界线性变换, 一对一地映射 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 上, 则 A 是可逆的.

巴拿哈空间的相应命题的证明常借助于 Baire 的纲定理.

42. 维数的保持. 关于算子, 有一个重要问题, 就是它们对于基础空间的几何学有何作用. 从有限维矢量空间的研究中, 熟知线性变换可以降低维数: 零变换, 作为一个极端的例子, 将每一空间退缩为一个 0 维空间. 无论如何, 如果一个有限维矢量空间上

的线性算子是一对一的(即它的核是$\{0\}$),它就不会降维;由于对逆变换(从值域回到定义域)也可以这样说,可推知它保持了维数.下列断语在某种意义上是把这个有限维的结果推广到任意希耳伯特空间.

问题 42. 如果存在一个从希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 到希耳伯特空间 $\mathbf{K}$ 的一对一的有界线性变换,则 $\dim \mathbf{H} \leqslant \dim \mathbf{K}$. 如果 $\mathbf{H}$ 的象稠于 $\mathbf{K}$,则等式成立.

43. 等秩的投影.

问题 43. 如果 P 和 Q 都是投影且 $\|P-Q\|<1$, 则 P 和 Q 有相同的秩.

这是问题 101 的一个特例.

44. 闭图象定理. 内积(不一定完备)空间 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 间的线性变换 A 的图象就是使 $Af=g$ 成立的序对 $\langle f, g\rangle$($\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ 的元素)全体的集.(这是个标准的术语.奇怪的是竟然会有这样一个标准术语,但事实又确是如此. 根据在基础数学中被大家广泛接收的传统提法,一个函数依定义就是一个满足一定单值条件的序对全体的集.根据这个定义,A 的图象就是 A,给它另起一个名称说不上会有什么好处. 虽然如此,许多数学家高兴地接受了这个不必要的词语.这件事,它至少可作为一个警告,告诉我们对同一对象要从不同角度观察它.)一个线性变换称为闭的,如果它的图象是一个闭集.

问题 44. 一个希耳伯特空间到希耳伯特空间的线性变换是闭的当且只当它是有界的.

这个断语被称为希耳伯特空间的闭图象定理;在巴拿哈空间理论中它的证明通常基于纲推理(Dunford-Schwartz[1958. p. 57]).本定理并不使关于闭而无界的线性变换的课题成为不足道的. 这样的变换频繁出现于泛函分析的应用中;闭图象定理说的是它们只能出现于不完备的内积空间上(或希耳伯特空间的非闭线性流形上).

45. 无界对称变换. 一个内积空间 $\mathbf{H}$(不一定完备)上的一

个线性变换 A(不一定有界)叫做对称的，如果对一切 $\mathbf{H}$ 中的 f 和 g 有 $(Af, g)=(f, Ag)$. 使用这个中间性的术语(而不用"Hermite"或"自伴")是可取的，因为在自伴算子($A=A^*$)的惯用研究方法中，有界性是定义本身所必需的假定. 这里是否有实质的区别?

问题 45. (a)内积空间 $\mathbf{H}$ 上的对称线性变换必须是有界的吗? (b)如果 $\mathbf{H}$ 是一个希耳伯特空间，则如何?

第六章 乘法算子

46. 对角算子. 算子理论，如同数学的每一其它部分，如果没有大量具体例子作为储备，就不能真正地进行理论考察和研究. 下文中某些问题的目的就是储积一些具体例子，随后就可以检查它们的范数，逆和谱的性质.

作为适当的第一步，假设 $\mathbf{H}$ 是一个希耳伯特空间且 $\{e_j\}$ 是一族矢量，它们构成 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基. 算子 A 叫做一个对角算子如果 Ae_j 是 e_j 的一个数量倍式，譬如对每一 j，有 $Ae_j=\alpha_j e_j$; 数族 $\{\alpha_j\}$ 可以恰当地叫做 A 的对角线.

一个对角算子的定义当然依赖于基 $\{e_j\}$，但在对角算子的大多数讨论中事前都(可能是暗设地)先固定了一个基，而以后不再提到它. 另一做法是，对角算子可以用不变(与基无关)的术语刻划为一个正规算子，它的特征矢量张成全空间(证明可以这样刻划它，是一个容易的习题). 与对角算子联系的就范正交基通常是一个序列；强调它是"序列"，表示基础指标集的基数是 $\aleph_0$ 而序数是 ω. 在这特殊情形下有可能使用某些方便的语言(例如，"对角线的第一元素")也有可能使用某些方便的技巧(例如，用归纳法的构造法).

问题 46. 族 $\{\alpha_j\}$ 是对角算子的对角线的充要条件是它是有界的；如果它是有界的，则方程组 $Ae_j=\alpha_j e_j$ 唯一地确定一个算子 A，且 $\|A\|=\sup_j|\alpha_j|$.

47. l^2 上的乘法. 每一复数量序列 $\{\alpha_n\}$ 诱导一个线性变换 A 它把 l^2 映射到序列(不必要是平方可和的)全体组成的矢量空间中;按定义 $A\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle=\langle\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, \cdots\rangle$. 问题46的一半蕴涵如果 A 是一个算子(就是说, l^2 到它本身的一个有界线性变换), 则序列 $\{\alpha_n\}$ 是有界的. 如果取消了关于 A 是有界的假设,则将如何?

问题 47. 一个无界的数量序列能够诱导一个 l^2 到它本身的(可能是无界的)变换吗?

着重点在于全部 l^2 要属于变换的定义域,意即,如果 $\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle\in l^2$,则 $\langle\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, \cdots\rangle$ 属于 l^2.应将本问题与问题22作比较. 该问题考虑那些与 l^2 中元素相乘必得 l^1 元素的序列(结论是它们必须属于 l^2); 本问题则考虑那些与 l^2 元素相乘必得 l^2 元素的序列(而问它们是否必须属于 l^∞). 关于到 $\mathbf{L}^2$ 去的推广可参看问题51.

48. 对角算子的谱. 有界的复数序列全体组成的集是一个(按逐点运算的)代数,具单位元($\alpha_n=1$ 对一切 n), 具共轭运算($\{\alpha_n\}\to\{\alpha_n^*\}$),且具有范数($\|\{\alpha_n\}\|=\sup\limits_n|\alpha_n|$). 一个有界序列 $\{\alpha_n\}$ 被称为可逆的,如果它在这个代数中有一个逆元, 就是说, 如果存在一个有界序列 $\{\beta_n\}$, 使得对一切 n 有 $\alpha_n\beta_n=1$. 出现这种情形的充要条件是 $\{\alpha_n\}$ 距0有界, 就是说, 存在一个正数 δ 使得对一切 n 有 $|\alpha_n|\geqslant\delta$.

如果 $\mathbf{H}$ 是具就范正交基 $\{e_n\}$ 的希耳伯特空间,容易验证:对应 $\{\alpha_n\}\to A$ 是序列代数到 $\mathbf{H}$ 上算子的代数中的一个同构(一个嵌入),这里的 A 表示 $\mathbf{H}$ 上的算子, 它使得对一切 n 有 $Ae_n=\alpha_n e_n$. 这个对应不但保持了所有熟悉的代数运算, 还保持了共轭运算;这就是说,如果 $\{\alpha_n\}\to A$, 则 $\{\alpha_n^*\}\to A^*$. 这对应也保持范数(参看问题46).

问题 48. 一个具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子是可逆算子当且只当序列 $\{\alpha_n\}$ 是可逆序列, 推论: 对角算子的谱是它的对角项全

体所成的集的闭包。

这个结果有下列有用的推论：复平面上每一非空紧集是某一算子(而且事实上是某一对角算子)的谱．证明：在指定的紧集中求一个稠密的复数序列，然后构成一个以此序列为其对角线的对角算子．

49．乘法的范数． 对角算子是一个一般的测度论构造的特例．假设 X 是一个具有测度 μ 的测度空间．如果 φ 是 X 上有界(指本性有界)复值可测函数，则 φ 所诱导的乘法算子(或简称乘法)就是 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上由

$$(Af)(x)=\varphi(x)f(x), \qquad \text{对 } X \text{ 中一切 } x$$

定义的算子 A(此处，如同测度论中其它地方，两个函数看作恒同的如果它们仅在一个零集上有差异．这既适用于有界的 φ，也适用于平方可积的 f)．如果 X 是一切正整数的集而 μ 表示计数测度(每一集的测度就是它所含的元素的个数)，则乘法算子约化为对角算子。

问题 49． *φ 所诱导的乘法的范数怎样利用乘子 φ 来表示?*

50．乘子的有界性． 对角算子理论大部分可推广于测度空间上的乘法算子，但其细节时常变成不那么清楚．断语"如果一个序列是一个对角算子的对角线，则它是有界的"的推广是一个样例．

问题 50． *如果(关于一个 σ-有限测度的) $\mathbf{L}^2$ 上的一个算子 A 使 $Af=\phi\cdot f$ 对 $\mathbf{L}^2$ 中一切 f 成立，则 ϕ 是可测的且有界的。*

51．乘法的有界性． 每一复值可测函数 ϕ 诱导一个线性变换 A，它把 $\mathbf{L}^2$ 映射到(不必要是平方可积的)可测函数全体组成的矢量空间中；依定义，$(Af)(x)=\phi(x)f(x)$．问题 50 的一半蕴涵：如果 A 是一个算子(即 $\mathbf{L}^2$ 到它自身的有界线性变换)，则函数 φ 是有界的．如果取消了关于 A 的有界性假定，则将如何?

问题 51． *无界的函数能够诱导一个(关于一个 σ-有限测度的) $\mathbf{L}^2$ 到它自身的(可能是无界的)变换吗?*

这是把问题 47 推广到测度空间．

52．乘法的谱． 对角算子理论的某些部分就象下面这样，可

以几乎逐字逐句地推广到乘法算子. 有界可测函数(依零集为模识别之)全体是一个(逐点运算的)代数, 具有单位元($\varphi(x)=1$ 对一切 x), 具有共轭运算($\varphi \to \varphi^*$)且具有范数($\|\varphi\|_\infty$). 有界可测函数是可逆的, 如果它在这个代数中有逆元,就是说,如果存在一个有界可测函数 ψ 使得对几乎每一 x,有 $\varphi(x)\psi(x)=1$. 出现这种情形的充要条件是 φ 几乎处处距 0 有界,就是说,存在一个正数 δ 使得 $|\varphi(x)|\geqslant\delta$ 对几乎每一 x 成立.

A 表示由 $(Af)(x)=\varphi(x)f(x)$ 定义的乘法算子,则对应 $\varphi\to A$ 是函数代数到 $\mathbf{L}^2$ 上的算子代数中的一个同构(一个嵌入). 这个对应不但保持了所有熟悉的代数运算,还保持了共轭运算;这就是说,如果 $\varphi\to A$,则 $\varphi^*\to A^*$. 如果测度是 σ-有限的, 这对应也保持了范数(参看解 49).

序列的值域所扮演的角色在一般问题中由函数 φ 的本性值域扮演,依定义, 后者就是一切复数 λ 所成的集, 对这些 λ 的每一邻域 N,集 $\varphi^{-1}(N)$ 有正测度.

问题 52. 由 φ 诱导的(关于一个 σ-有限测度的)$\mathbf{L}^2$ 上的乘法算子是可逆的当且只当 φ 是一个可逆函数. 推论: 一个乘法的谱就是乘子的本性值域.

53. 函数希耳伯特空间上的乘法. 如果乘以函数 φ 把 $\mathbf{L}^2$ 映入其自身, 则 φ 必须是有界的(解 51), 所以乘以 φ 的乘法必须是 $\mathbf{L}^2$ 上的一个算子. 把这些断语类推于函数希耳伯特空间,是否成立?

问题 53. 假设 $\mathbf{H}$ 是一个函数希耳伯特空间, 譬如是在集 X 上的, 且设 φ 是 X 上的一个复值函数它使 $\varphi\cdot f\in\mathbf{H}$ 当 $f\in\mathbf{H}$ 时恒成立. (a)如果 $Af=\varphi\cdot f$, 线性变换 A 是否有界? (b)如果 $Af=\varphi\cdot f$ 且 A 是有界的,函数 ϕ 是否有界?

54. 函数希耳伯特空间的乘子. 假设 $\mathbf{H}$ 是集 X 上的一个函数希耳伯特空间. X 上的函数 φ 叫做 $\mathbf{H}$ 的一个乘子, 如果 $\varphi\cdot f\in\mathbf{H}$ 对 $\mathbf{H}$ 中每一 f 成立. 解 53 说的是每一个乘子是有界的. 确定一个函数希耳伯特空间的全部乘子常是有趣而重要的.

对 l^2 这最浅易的无穷维空间说，易于证明一个函数(就是一个序列)是一个乘子的充要条件是它是有界的. 在某种意义上说，空间 l^2 有太多的乘子：它们之中大多数不属于本空间.

空间 $\mathbf{A}^2$ 的性质则与此不同：对于它说，一个函数是一个乘子的充要条件是它是有界的且属于本空间. 在某种意义上说，这个空间的乘子太少了：这空间中的函数大多数不是乘子.

如果 X 是有限的，又若 $\mathbf{H}$ 由 X 上的一切函数组成，则 $\mathbf{H}$ 的一切乘子的集不太大也不太小：它恰由 $\mathbf{H}$ 的一切元素组成. 对于无限维空间说，这种情形是否可能发生?

问题 54. 构造一个无穷维函数希耳伯特空间，使得 $\mathbf{H}$ 的一切乘子恰好就是 $\mathbf{H}$ 的一切元素.

说 $\mathbf{H}$ 的每一元素是一个乘子，就等于说 $\mathbf{H}$ 对于乘法封闭，也就是说，$\mathbf{H}$是一个代数. 常数函数 1 是每一个 $\mathbf{H}$ 的乘子；所以说 $\mathbf{H}$ 的每一个乘子属于 $\mathbf{H}$，等于说 $1\in\mathbf{H}$. 如果 $1\in\mathbf{H}$，则代数 $\mathbf{H}$ 当然有一个单位元，但显易的例子可以说明逆命题不真. 这样，构造一个无穷维函数希耳伯特空间使它(在逐点函数乘法下)成为一个具有单位元的代数，这虽然不完全是，也几乎就是上面的问题所要求的.

第七章 算子矩阵

55. 可交换算子的行列式. 应用一个就范正交基可以把希耳伯特空间表示成一维子空间的直接和. 与就范正交基有联系的某些矩阵理论值得推广到更一般的直接和去. 为了更明确一些，假定 $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2\oplus\mathbf{H}_3\oplus\cdots$(不可列的直接和照样可行，有限的直接和甚至更好些.) 如果把直接和看作“内部”的，即诸 $\mathbf{H}_i$ 都是 $\mathbf{H}$ 的子空间，则 $\mathbf{H}$ 的元素 f 就可表示为和式

$$f=f_1+f_2+f_3+\cdots,$$

其中 f_i 属于 $\mathbf{H}_i$. 如果 A 是一个 $\mathbf{H}$ 上的算子，则

$$Af=Af_1+Af_2+Af_3+\cdots.$$

每一 Af_j 作为 $\mathbf{H}$ 的一个元素可以分解为

$$Af_j = g_{1j} + g_{2j} + g_{3j} + \cdots,$$

其中 g_{ij} 属于 $\mathbf{H}_i$. 诸 g_{ij} 当然依赖于 f_j, 且其相依关系是线性的且连续的。由此推知

$$g_{ij} = A_{ij} f_j,$$

而 A_{ij} 是从 $\mathbf{H}_j$ 到 $\mathbf{H}_i$ 的一个有界线性变换. 这样，构造已经完毕;对于 $\mathbf{H}$ 上的每一 A 有一个矩阵 $\langle A_{ij}\rangle$ 与之相应, 这矩阵的 i 行 j 列的元素就是 A 在 $\mathbf{H}_j$ 上的限制在第 i 个成分空间上的投影。

从算子到(由一个固定的直接和分解诱导出来的)矩阵的对应具有一切应有的代数性质. 如果 $A=0$, 则对一切 i 和 j 有 $A_{ij}=0$; 如果 $A=I$(在 $\mathbf{H}$ 上的恒等算子) 则 $A_{ij}=0$ 当 $i\neq j$ 且 $A_{ii}=1$ (在 $\mathbf{H}_i$ 上的恒等算子). 算子矩阵的线性运算就是显然应有的那些运算. A^* 的矩阵就是 A 的矩阵的伴随转置; 就是说, A^* 的矩阵在 i 行 j 列有元素 A^*_{ji}。算子的乘法对应于由 $\sum_k A_{ik}B_{kj}$ 定义的矩阵乘积。这里没有收敛性的麻烦,但可能有可交换性的麻烦;必须小心察看因子的次序。

即使直和加项的数目很小(譬如只有两项), 且即使所有加项都是全同的, 算子矩阵的理论也不会变成不足道的. 较常出现下述情况: 已给一个希耳伯特空间 $\mathbf{H}$, 前段中 $\mathbf{H}$ 所担任的角色现在由 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 担任, 而该直接和上的算子由二行二列矩阵表示, 矩阵的元素是 $\mathbf{H}$ 上的算子.

问题 55. 如果 A, B, C, D 是一个希耳伯特空间上的两两可交换算子, 则算子矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆的充要条件是形式行列式 $AD-BC$ 可逆。

56. 算子行列式。 在许多情况下算子矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的可逆性起着中心作用，但该矩阵里的元素不是可交换的；任何特殊情形都值得知道一下.

问题 **56**. 如果 C 与 D 可交换，又如 D 是可逆的，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆的充要条件是 $AD-BC$ 可逆. 试构造一些例子来说明：如果取消了 D 是可逆的假定，则条件变成不必要的且不充分的.

对于有限矩阵[注] 我们懂得更多：（参看 Schur[1917]）：如果 C 和 D 可交换，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

与 $AD-BC$ 有相同的行列式. 可以安排一般问题的证明使得对于有限维的特例它实际上证明了这个较强的结论.

57. 含一个有限维元素的算子行列式. 如果 A, B, C, D 是一个希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的算子，则算子矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

诱导(是)一个 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 上的算子，而且(参看问题 56)，如果 A 和 D 可逆，则 M 可逆. 逆命题(如果 M 可逆，则 A 和 D 可逆)非真.（再参看问题 56.）

算子矩阵定义了希耳伯特空间的直接和上的算子，不论空间的直和加项是否全同. 至少在一个令人感兴趣的特殊情况下，前段中那非真的逆命题变成真的.

问题 **57**. 如果 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 是希耳伯特空间，$\dim\mathbf{H}<\infty$，又如

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

是 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ 上可逆算子，则 A 和 D 两者都是可逆的. 推论：M 的谱是 A 和 D 的谱的并.

[注] 指该矩阵的各元素是有限维空间到有限维空间的变换. ——译者注

注意 A 是 $\mathbf{H}$ 上的算子，D 是 $\mathbf{K}$ 上的算子，而 B 把 $\mathbf{K}$ 映入 $\mathbf{H}$ 中。

第八章 谱的性质

58. 谱与共轭变换. 一个算子的谱中的一点为什么会取得它在那里的位置，这个问题常是有用的。说 λ 在 A 的谱中意指 $A-\lambda$ 不是可逆的. 问题于是化约为：一个非可逆算子为了什么而不是可逆的？有几种回答这个问题的途径；它们引致谱的几种（混乱地互相交叉着的）分类法.

这个课题的最简单的研究方法可能是去回忆起如果一个算子是下有界的且有稠值域，则它是可逆的. 推论：如果 $\Lambda(A)$ 是 A 的谱，如果 $\Pi(A)$ 是使得 $A-\lambda$ 不是下有界的复数 λ 全体的集，如果 $\Gamma(A)$ 是使得 $A-\lambda$ 的值域的闭包是 $\mathbf{H}$ 的真（意即，异于 $\mathbf{H}$ 的）子空间的复数 λ 全体的集，则

$$\Lambda(A)=\Pi(A)\cup\Gamma(A).$$

集 $\Pi(A)$ 称为 A 的近似点谱；一个数 λ 属于 $\Pi(A)$ 当且只当存在一个单位矢量的序列 $\{f_n\}$ 使得 $\|(A-\lambda)f_n\|\to 0$. 近似点谱的一个重要子集是 A 的点谱 $\Pi_0(A)$；数 λ 属于它当且只当存在一个单位矢量 f 使得 $Af=\lambda f$（就是说，$\Pi_0(A)$ 是 A 的一切特征值的集）. 集 $\Gamma(A)$ 称为 A 的压缩谱. 示意地：把谱（Λ）想象成两个交迭着的圆盘（Π 和 Γ）的并，其中的一个圆盘（Π）又被一个垂直于交迭部分的直径分成两部分（Π_0 和 $\Pi-\Pi_0$）. 结果是将 Λ 分割成五部分，每一部分都可能有时出现有时不出现，天生的分类学者可能会乐于探究这 2^5 个先验的可能性中何者是可实现的；但在多看几个迄今为止未在本书中出现的算子例子之前，我们劝告他还是暂缓尝试为妙.

算子理论的命名中有一些有时会引起混乱的方面，现在是评论它的一个好机会. 有对正规算子称为谱定理的（参看问题 97），也有对一切算子称为谱的. 后者的研究或许可以称为**谱理论**，有

时它也确被这样称呼. 在正规算子的情况，谱定理提供了关于谱理论的信息,但是这些信息通常能够从别的地方较容易地得到.在这一意义下的谱理论是算子理论的最容易的方面之一.

在算子理论的这一部分中,哪些概念与记号是最方便的,并未获得一致的看法. 显然每本书都各自介绍自己的命名法，本书也不例外. 一度盛行的方法是把谱分成三个不相交的集，就是点谱 Π_0，剩余谱 $\Gamma-\Pi_0$ 和连续谱 $\Pi-(\Gamma\cup\Pi_0)$. （集 Π 与 Γ 可能交迭；稍后,不难构造这样的例子.)关于记号：常以 σ(或 Σ)代替 Λ 表示谱.

掌握这些概念的最好方法当然是要通过有启发性的特例，但要先讲几个一般事实；它们有助于研究特例. 最有用的知识是谱与复平面的代数和拓扑的关系. 最容易的代数问题可能是关于共轭变换(即求伴随算子与求共轭复数)的问题.

问题 58. 当一个算子换成它的伴随算子时，它的点谱，压缩谱和近似点谱将发生什么变化？

59. **谱映射定理**. “A 是一个算子而 p 是一个多项式，则 $\Lambda(p(A))=p(\Lambda(A))$”(参看 Halmos[1951, p. 53])，这一类断语称为谱映射定理；它的其它例子关联到多项式以外的函数，诸如，倒数、共轭以及广泛的各类解析函数等(Dunford-Schwartz[1958, p. 569]).

问题 59. 关于多项式的谱映射定理，以 Π_0 或 Π 或 Γ 代 Λ 时是否成立？关于倒数$\left(p(z)=\dfrac{1}{z}\text{ 当 } z\neq 0\right)$的谱映射定理当应用于可逆算子且以 Π_0 或 Π 或 Γ 代 Λ 时又如何？

60. **相似性与谱**. 如果存在一可逆算子 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则两算子 A 与 B 称为相似的.

问题 60. 相似的算子有相同的谱，相同的点谱，相同的近似点谱和相同的压缩谱.

61. **乘积的谱**. 如果 A 和 B 是算子，又若它们中最少有一个是可逆的,则 AB 与 BA 相似(其证明,当 A 可逆时应用 $BA=$

$A^{-1}(AB)A$ 或当 B 可逆时应用 $AB=B^{-1}(BA)B$). 这蕴涵(问题60)如果 A 和 B 中最少有一个是可逆的，则 AB 与 BA 有相同的谱. 在有限维的情形我们了解得更多一些: 不必假定可逆性，AB 与 BA 恒有相同的特征多项式. 如果 A 和 B 都不可逆，则在无穷维的情形，两个积算子不一定有相同的谱(下面有许多例子)，但是它们的谱不会有太大的差异. 精确的断语如下.

问题61. $\Lambda(AB)$ 与 $\Lambda(BA)$ 的非零元相同.

62. 近似点谱的闭包.

问题62. 近似点谱恒是闭的吗?

63. 谱的边界.

问题63. 算子的谱的边界包含于其近似点谱中.

第九章 谱 的 例

64. 正规算子的剩余谱. 现在该考虑特例了. 第一个结果是，对于已知的最驯服的一大类算子——正规算子来说，不会出现最坏的谱病态.

问题64. 如果 A 是正规的，则 $\Gamma(A)=\Pi_0(A)$ (所以 $\Lambda(A)=\Pi(A)$). 另一表达方式: 正规算子的剩余谱恒为空集.

请记起 A 的剩余谱就是 $\Gamma(A)-\Pi_0(A)$.

65. 对角算子的谱的各部分. 对角算子的谱已被确定(问题48)为其对角线的闭包; 该谱的精密结构则要另行审察才能确定.

问题65. 对每一对角算子，求其点谱，压缩谱和近似点谱.

66. 乘法算子的谱的各部分.

问题66. 对每一乘法，求其点谱，压缩谱和近似点谱.

67. 单侧移位. 最重要的，也是在希耳伯特空间理论的一切部分中都起着重要作用的单个算子是单侧移位，它的最简单的定义方法也许是考虑平方可和序列的希耳伯特空间 l^2: 单侧移位就是由

$$U\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$$

定义的 l^2 上的算子 U.（单侧移位曾经在本书中出现过，虽然到现在才给它定名；参看解 56.）线性是明显的．至于有界性，它的成立是绰绰有余的．经过移位，矢量的范数不但限制在合理的界限内，而且被准确地保持下来——单侧移位是个等距算子．U 的值域不是 l^2 而是 l^2 的一个真子空间——第一坐标为 0 的矢量所成的子空间．值域不是全空间的等距算子的存在是无限维空间的特征．

如果 e_n 表示矢量 $\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$，其中 $\xi_n=1$ 而当 $i\neq n$ 时 $\xi_i=0(n=0, 1, 2, \cdots)$，则诸 e_n 形成 l^2 的一个就范正交基．U 在这个基上的作用可用

$$Ue_n=e_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

来描述．这些方程唯一地确定了 U，而且在 U 的大部分研究中可以作为 U 的定义．

一个熟悉的具有以非负整数为下标的就范正交基的空间是 $\mathbf{H}^2$（见问题 26)．由于，在这个空间中，$e_n(z)=z^n$，使下标增大 1 的作用就同于乘以 e_1．换句话说，上面那单侧移位恰同于 $\mathbf{H}^2$ 上由

$$(Uf)(z)=zf(z)$$

定义的乘法算子．说它“恰同于”，而且事实上，说“那”单侧移位，是有些微滥用语言；但这是一种方便用法，下文将继续下去．正确地说，单侧移位是算子的一个酉等价类，不过把它看作具有许多不同表示方式的“一个”算子不会引致什么混乱．

问题 67．单侧移位的谱是什么？谱的各部分（点谱、压缩谱和近似点谱）是什么？关于单侧移位的伴随算子的同一问题的答案是什么？

68．**双侧移位**．单侧移位的一个近亲是双侧移位．为了定义它，令 $\mathbf{H}$ 表示双向（双侧）的平方可和序列全体所成的希耳伯特空间．$\mathbf{H}$ 的元素可以最方便地写成下式

$$\langle\cdots, \xi_{-1}, \xi_{-2}, (\xi_0), \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle;$$

括号中的项指明对应于下标 0 的项．双侧移位就是 $\mathbf{H}$ 上由

$$W\langle \cdots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, (\xi_0), \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$$
$$=\langle \cdots, \xi_{-3}, \xi_{-2}, (\xi_{-1}), \xi_0, \xi_1, \cdots\rangle$$

定义的算子 W. 线性是明显的而有界性的成立是绰绰有余的；双侧移位，如同单侧移位，是一个等距算子. 由于双侧移位的值域是整个空间 $\mathbf{H}$，它还是一个酉算子.

如果 e_n 表示矢量 $\langle\cdots, \xi_{-1}, (\xi_0), \xi_1, \cdots\rangle$，其中 $\xi_n=1$ 而当 $i\neq n$ 时 $\xi_i=0(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，则诸 e_n 形成 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基. W 在这个基上的作用可由

$$We_n=e_{n+1} \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

描述.

问题 68. 双侧移位的谱是什么？谱的各个部分（点谱、压缩谱和近似点谱）是什么？对于双侧移位的伴随算子的同一问题的答案是什么？

69. 函数(希耳伯特空间)的乘法的谱. 迄今研究过的每一算子是一个乘法，或是在正统意义下(在 $\mathbf{L}^2$ 上)的乘法或是（在一个函数希耳伯特空间上)广义的乘法，后者常较难于研讨；但它确也有其有利之处，即具有一个令人满意的依据于谱的特征.

问题 69. 希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个算子 A 可以表示成一个函数希耳伯特空间上的乘法的充要条件是 A^* 的特征矢量张成 $\mathbf{H}$.

注意：正如 $\mathbf{L}^2$ 空间上的乘法的有关事实所指明(参看解 66)，这个特征仅适用于函数希耳伯特空间. 本结果似属于 P. R. Halmos 和 A. L. Shields.

70. 移位的相对谱. 算子 A 称为相对可逆的，如果存在一个算子 B 使得 $ABA=A$. 这个概念颇为特殊，也不特别有用，但具有一些古怪的性质. 很清楚，每一可逆算子是相对可逆的；事实上，每一个左可逆或右可逆的算子也是相对可逆的. 这些评注是显然的；较此远不明显的，(但是真的)是每一有限维空间上的算子是相对可逆的. (提示：把这算子表示为一个可逆算子与一个幂零算子的直接和.)这个概念属于一般环论；关于有限维空间的断语可

以表示为：一个复数域上的有限维全矩阵代数是一个正则环(参看 von Neumann [1936])．(任意维希耳伯特空间上的)算子 A 的相对谱是使 $A-\lambda$ 非相对可逆的复数 λ 全体的集．

问题 70．单侧移位的相对谱是什么？

相对谱概念由 Asplund [1958] 引入并研究．

71．相对谱的闭包．

问题 71．相对谱恒是闭的吗？

第十章 谱 半 径

72．预解式的解析性． 假设 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个算子．如果 λ 不属于 A 的谱，则算子 $A-\lambda$ 是可逆的；记 $\rho(\lambda)=(A-\lambda)^{-1}$．(当必须指明函数 ρ 关于算子 A 的依赖性时，记作 $\rho=\rho_A$．)函数 ρ 称为 A 的*预解式*．ρ 的定义域是 A 的谱的余集，它的值是 $\mathbf{H}$ 上的算子．

预解式的定义十分明晰，这使人相信它可能是一个性质良好的函数，为了准确地表达这一事实，可考虑很一般的函数 φ，其定义域是复平面中的开集，而其值是 $\mathbf{H}$ 上的算子．这样的函数将称为*解析的*，如果对于 $\mathbf{H}$ 中每一 f 和 g，数值函数 $\lambda\to(\varphi(\lambda)f, g)$ (具有与 φ 相同的定义域)按通常意义是解析的．(为使这个概念与其它密切相关的概念区别开来，它有时称为*弱解析性*．)设由 $\psi(\lambda)=\varphi(1/\lambda)$ 定义的函数 ψ 可以在原点指定一个值使得它在该处成为解析的，则(恰与数值函数一样)φ 称为在 ∞ 解析且指定 ψ 在 0 的值为 φ 在 ∞ 的值．

问题 72．每一算子的预解式在其定义域的每一点以及在 ∞ 是解析的，它在 ∞ 的值是零(算子)．

关于预解式的详尽研究，可参看 Dunford-Schwartz [1958, VII, 3]．

73．谱的非空性． 每一个算子都有非空谱吗？这个问题迟早会提出．即使有限维的情形也表明这并非显易不足道的．说每一个

有限矩阵有一个特征值同于说每一有限矩阵的特征多项式最少有一个零点；而这，不变其一般性，又同于说每一(具复系数的)多项式方程最少有一个(复的)零点．换句话说，关于谱的这个一般问题，在有限维情形，就已经象代数基本定理那么深刻，而后者的证明通常基于复解析函数的理论．现在，此类函数的理论必然会进入(不论维数是有限或无穷的)算子的研究中该不会那么令人诧异了．

问题 73．每一算子有一个非空谱．

74．谱半径．一个算子 A 的谱半径，以 $r(A)$ 为记号，由

$$r(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\Lambda(A)\}$$

定义．很清楚，$0\leqslant r(A)\leqslant\|A\|$；谱映射定理也蕴涵对每一正整数 n 有 $r(A^n)=(r(A))^n$．情况常常是这样，即使一个算子的谱难于求得，其谱半径则较易计算；使计算容易的工具是下面的断语．

问题 74．对每一算子 A，

$$r(A)=\lim_n\|A^n\|^{1/n},$$

此式的意义是，所示极限恒存在且其值如所示．

这个结果的一个容易的推论是，如果 A 与 B 是可交换算子，则

$$r(AB)\leqslant r(A)r(B).$$

还有一个推论多少不那末容易，但也不过是关于不等式的稍为复杂的分析，这就是，如果 A 与 B 可交换，则

$$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B).$$

如果不假定可交换性，则下面这个二维的例子，如

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

证明次可乘性与次可加性都不能保持．

75．加权移位．加权移位就是(单侧或双侧的)移位与一个与其相容的对角算子的积．更明白地说，假设 $\{e_n\}$ 是一个就范正交基($n=0, 1, 2, \cdots$ 或 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$)，并设 $\{\alpha_n\}$ 是一个复数

的有界序列(n 的集与前者同). 加权移位算子就是形如 SP 的算子, 这里 S 是一个移位($Se_n=e_{n+1}$)而 P 是以 $\{\alpha_n\}$ 为对角线的对角算子($Pe_n=\alpha_n e_n$). 对于加权移位算子并非一切都已了解, 但只此已经了解的少量知识已使它们在构造例子和反例中几乎成为不可缺少的了.

问题 75. 如果 P 和 Q 是对角算子, 具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$, 又若对一切 n 有 $|\alpha_n|=|\beta_n|$, 则加权移位 $A=SP$ 与 $B=SQ$ 是酉等价的.

关于两个加权移位的讨论, 我们有权要求以两个就范正交基为参数系, 但这样做所得到的普遍性是很微弱的. 如果 $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 是就范正交基, 则存在酉算子 U 使得对一切 n 有 $Ue_n=f_n$, 而 U 在任一酉等价性的证明中都可不费力地通过.

关于加权移位的酉等价性的结果有两个有用的推论. 首先, 带权数 α_n 的加权移位酉等价于带权数 $|\alpha_n|$ 的加权移位. 由于酉等价的算子是"抽象地恒等的", 所以只限于注意带非负权数的加权移位, 这对普遍性说无任何损失. 这也就是允许使用"权"一词的理由. 其次, 如果 A 是加权移位, 又若 α 是一个模 1 的复数, 则由于 αA 是一个加权移位, 其诸权数与 A 的对应权数有相同的模, 可推知 A 与 αA 是酉等价的. 换句话说, 在酉等价的范围内, 一个加权移位并不因乘以一个模 1 的数而变化. 这蕴涵(例如)加权移位的谱有圆对称性: 如果 λ 在谱中又若 $|\alpha|=1$, 则 $\alpha\lambda$ 也在谱中.

76. 加权移位的相似性. 问题 75 的逆是否成立? 换句话说, 假设 A 和 B 是加权移位, 带权数 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$; 如果 A 与 B 酉等价, 是否可推出对一切 n 有 $|\alpha_n|=|\beta_n|$? 这可能会令人感到无从着手, 但如通过正确途径, 也不难得解. 答案是否定的; 理由是对双侧移位说, 权数的平移产生一个与它酉等价的移位. 就是说: 如果 $Ae_n=\alpha_n e_{n+1}$ 而 $Be_n=\alpha_{n+1}e_{n+1}$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$), 则 A 与 B 是酉等价的. 事实上, 如果 W 是双侧移位 ($We_n=e_{n+1}$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$), 则 $W^*AW=B$; 可是, 如果序列 $\{|\alpha_n|\}$ 不是常数,

则至少有一个 n 使得 $|\alpha_n| \neq |\alpha_{n+1}|$.

单侧移位则有不同的性质. 如果诸权数中有一些允许为零, 则情况有一部分是讨厌的, 一部分是不足道的. 在好的情形(无零权数)下, 单侧移位的伴随算子 A^* 的核由 e_0 张成, A^{*2} 的核由 e_0 和 e_1 张成, 而一般地, A^{*n} 的核由 $e_0, \cdots, e_{n-1}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 张成. 如果 A 与 B 是酉等价的加权移位, 则 A^{*n} 与 B^{*n} 也是酉等价的; 譬如说, $A=U^*BU$, 则 U 必将 $\ker A^{*n}$ 映成 $\ker B^{*n}$. 这蕴涵, $\{e_0,\cdots,e_{n-1}\}$ 的张成空间在 U 下不变, 而由此又可推出 U 是一个对角算子. 由于一个酉对角矩阵的对角线元素有模 1, 可以推知, 对每一 n, A 与 B 在 e_n 上的作用, 仅能相差一个模 1 的因子.

对权数非零的加权移位说, 这解答了酉等价的问题; 关于相似性则又怎样?

问题 76. 如果 A 和 B 是单侧加权移位, 带非 0 权数 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$, 则 A 与 B 相似的充要条件是商

$$\left|\frac{\alpha_0\cdots\alpha_n}{\beta_0\cdots\beta_n}\right|$$

的序列距 0 有界而且距 ∞ 有界.

相似性比起酉等价性是不那么严峻的限制; 关于相似性的问题常较易于回答. 修改关于单侧移位的论证, 把修改的重点主要放在记号而不是概念上, 由此可能得到双侧移位相似性的类似于问题 76 里所给的那样一个满意的条件; R. L. Kelley 就这样做了.

77. 加权移位的范数和谱半径.

问题 77. 试用加权移位的权数表示它的范数和谱半径.

78. 加权移位的特征值. 任意的加权移位的谱及其各部分的准确决定不是一个显易的问题. 下面是一个有用的零碎结果.

问题 78. 求一切(带非零权数的)单侧加权移位及它们的伴随算子的一切特征值.

在权数中 0 的可能出现不是一个本质的困难, 但却使人讨厌. 一个单侧加权移位如有一个权数为 0 便因此变成一个有限维算子

和另一个加权移位的直接和．出现无穷多个零权数能引起某些有趣的麻烦(参看问题81)，但是关于移位的好的问题必须与非零权数打交道．

79．加权序列空间．“加权移位”一词现在有一种确切意义，但它本来也(同样合理地)可以有其它某种意义．它现在的意义是对变换加上权数以修改通常序列空间 l^2 上的通常移位；它可能有的意义是对空间加上权数．

为了明显地描述另一意义，令 $p=\{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$ 表示一个正数序列，并令 $l^2(p)$ 表示满足 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n|\xi_n|^2<\infty$ 的复数序列 $\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$ 的集．关于逐坐标的线性运算和由

$$(\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle, \langle\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots\rangle)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n\xi_n\eta_n^*$$

定义的内积，集 $l^2(p)$ 是一个希耳伯特空间；它可以叫做一个加权序列空间．(这一切都指单侧的；双侧的情况可以类似地处理．)移位何时成为这空间上的一个算子？换句话说，如果 $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\in l^2(p)$，则 $Sf=\langle 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\in l^2(p)$，且当 f 遍于 $l^2(p)$ 上变化时，$\|Sf\|$ 被 $\|f\|$ 的一个常数倍所界，这命题何时能成立？答复是容易的．一个明显的必要条件是存在一个正常数 α 使得 $\|e_{n+1}\|\leqslant\alpha\|e_n\|$，这里的 e_n 当然是下标为 n 的坐标是 1，而一切其他坐标是 0 的矢量．由于 $\|e_n\|^2=p_n$，这个条件等于说序列 $\{p_{n+1}/p_n\}$ 是有界的．几乎显然地，这个必要条件也是充分的．如果对一切 n 有 $p_{n+1}/p_n\leqslant\alpha^2$，则

$$\|Sf\|^2=\sum_{n=1}^{\infty} p_n|\xi_{n-1}|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}}p_{n-1}|\xi_{n-1}|^2$$

$$\leqslant\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}p_n|\xi_n|^2=\alpha^2\|f\|^2.$$

关于通常序列空间上加权移位的每一问题都可以对于加权序列空间上通常移位重新提出；这里是一个样例．

问题 79． 如果 $p=\{p_n\}$ 是一个正数序列使得 $\{p_{n+1}/p_n\}$ 有界，$l^2(p)$ 上移位的谱半径怎样用 $\{p_n\}$ 表示？

80. 单点谱. 问题48(平面的每一非空紧子集是某一算子的谱)的证明还不够有伸缩性,不足以得出谱的各部分的一切不同性态的例. 这个证明用的是对角算子,它们恒有特征值;仅从这个证明不可能推断点谱是空集的算子的存在性. 乘法算子现在出来解决困难. 如果 D 是一个闭域, 如果对 D 中的 z 有 $\varphi(z)=z$, 又若 A 是在 D 中平面勒贝格测度的 $\mathbf{L}^2$ 空间上由 φ 诱导出的乘法算子,则 A 的谱是闭包 $\bar{D}$, 但 A 的点谱是空集. 用类似的技巧可以证明具有 $\Pi_0(A)=\phi$ 和$\Lambda(A)=$(譬如说) $[0, 1]$的算子 A 的存在性;只须利用$[0,1]$中的线性勒贝格测度. 只要平面中一个紧集 M 是使每一单个点都有 0 测度的(Borel 集上的)测度的支集, 则 M 是一个无特征值的算子的谱(说 M 是 μ 的支集, 意指如果 N 是一个使 $\mu(M\cap N)=0$ 的开集,则 $M\cap N=\emptyset$). 证明平面中每一非空紧完全(无孤立点)集是一个使每一单个点都有零测度的(Borel 集上的)测度的支集, 这是拓扑测度理论的常规习题(这个证明与希耳伯特空间理论没有多大关联). 由此推知每一如此的集是一个无特征值的算子的谱,非完全的集怎么样?

将代数学中的幂零元概念作适当的解析学上的推广, 可用以给出一个很满意的回答. 一个算子称为幂零的,如果它的某些正整数幂是零算子(最小的如此的幂次数称为幂零指数); 如果 $\lim\limits_n\|A^n\|^{1/n}=0$,算子 A 称为拟幂零的. 显然,幂零蕴涵拟幂零. 谱映射定理蕴涵,如果 A 是幂零的, 则 $\Lambda(A)=\{0\}$. 用范数表示谱半径的表示式蕴涵:如果 A 是拟幂零的, 则 $\Lambda(A)=\{0\}$, 而且逆命题也是真的. 幂零算子恒有非平凡核,从而有一个非空点谱;对拟幂零算子说,就不是如此.

问题 80. 构造一个拟幂零算子,其点谱是空集.

要看到在有限维空间上这样的例子显然是不存在的.

81. 直接和的谱. 两算子的直接和的谱是它们的谱的并集,对于点谱、近似点谱和压缩谱, 同命题也成立, 本结果从两个直和加项到任意有限多个加项的推广是一个显易的归纳法. 如果被加

项的项数无穷将如何？解答的一个可能线索是无穷维空间对角算子的性质. 如此的算子是一个无穷直接和，其每一加项是一个一维空间算子，但其谱是它们（诸加项）的谱的并集的闭包（问题48）.

问题 81. 诸算子的直接和的谱恒为它们的谱的并集的闭包吗？

82. Reid 的不等式. 算子的代数性质，例如是自伴的或是正的，在本书中迄今还没有起重大的作用. 它们出现于下一问题中，但只是附带地涉及；在目前的研究中，本问题着重讨论的是谱半径.

问题 82. 如果 A 和 B 是使得 A 正而 AB 自伴的算子，则对每一 f 有 $|(ABf, f)| \leqslant r(B)\cdot(Af, f)$.

本结果的一个稍弱的说法属于 Reid[1951]；其较弱之处在于他以 $\|B\|$ 取代 $r(B)$.

第十一章 范数拓扑

83. 算子的距离空间. 如果两算子 A 与 B 间的距离定义为 $\|A-B\|$，则一个希耳伯特空间上的算子全体的集变成一个距离空间. 关于该空间的标准的距离问题和拓扑问题中，有某些问题的答案比其他更有趣. 譬如说，我们会毫不踌躇地问该空间是否完备的. 回答是：是的. 证明是每一个数学家在他的一生中至少要进行一次的那一类例行的分析；它一点不会令人诧异. 这个结果，附带地说一下，它已经被悄悄用过了. 在解 72 中，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ 的收敛性是从 $\|A\|<1$ 的假定推出的. 警觉的读者该已经注意到，肯定该推断的合理性需要上述的完备性结果.（不那么警觉的读者也会注意到收敛性概念本身必须参照某种拓扑而言.）

对完备性就说到这里，关于可分性要说些什么？如果基础希耳伯特空间不是可分的，不能料想其上的算子空间是可分的，而且的

确容易证明它不是如此. 这就留下了沿着这些方向的又一个自然的问题.

问题 83. 如果一个希耳伯特空间是可分的, 可否推知它上面的算子组成的距离空间是可分的?

84. 逆算子的连续性. 在类如希耳伯特空间上的算子空间的代数结构上引入拓扑之后, 紧接着习惯地也是必要地会探究有关联的代数运算的连续性, 在目前讨论的问题中, 结果是所有初等代数运算(线性组合, 共轭, 乘法)都是对于它们的诸变元全面连续. 并且算子的范数也是它的变元的连续函数. 证明都是烦琐无味的.

上面所未提到的主要代数运算是求逆. 由于不是每一算子都是可逆的, 逆算子的连续性问题仅在算子空间的一个子集上有意义.

问题 84. 可逆算子组成的集是开的. 该集到其本身上的映射 $A\to A^{-1}$ 是否连续?

可逆算子集是开的这一陈述并不回答关于该集的几何学的一切问题. 譬如说, 它没有说到可逆算子是否能完全包围一个奇异的(=不可逆的)算子. 用更专门的术语来说: 有没有任何孤立的奇异算子? 答案是"否"; 奇异算子集是(弧)连通的. 理由: 如果 A 是奇异的, 则对一切数值 t, tA 也是如此; 映射 $t\to tA$ 是把算子 0 连结到算子 A 的连续曲线. 可逆算子组成的开集也是连通的吗? 这问题要难得多, 参看问题 110.

85. 谱的连续性. 谱(暂时仅限于讨论一个固定的希耳伯特空间上的算子)是一个函数, 它的定义域由算子组成而其值域则由紧复数集组成. 尝试去定义这样一类函数的连续性的意义, 这是有道理的. 谱是否连续? 设计下面的例是为了证明不论怎样解释该问题, 答案将恒是"否".

问题 85. 如果 $k=1, 2, 3, \cdots$ 或 $k=\infty$, 令 A_k 表示这样的双侧加权移位, 它使得 $A_ke_n=e_{n+1}$ 或 $(1/k)e_{n+1}$ 依据 $n\neq 0$ 或 $n=0$ (置 $1/\infty=0$). 算子 $A_k(k=1, 2, 3, \cdots, \infty)$ 的谱是什么?

86. 谱的半连续性. 问题85的例子指明存在着一个大谱算子，在它的每一个邻域里都有着具有相对地小的谱的算子. 这情况能从另一方向发生吗？有没有一个小谱(算子)具有与它任意接近的大谱(算子)？答案却是"否". 准确的断语是：谱是一个上半连续函数，其意义如下.

问题86. 对于每一个算子 A 和每一个包含 $\Lambda(A)$ 的开集 Λ_0，对应着一个正数 ε，使得如果 $\|A-B\|<\varepsilon$，则 $\Lambda(B)\subset\Lambda_0$.

这是一个标准的结果. 一个标准的参考文献是 Hille-Phillips [1957, p. 167]；另一个是 Rickart[1960, p. 35]. Halmos-Lumer [1954] 讨论了某些有关联的函数的半连续性.

87. 谱半径的连续性. 由于谱是上半连续的(问题86)，谱半径也是如此. 这就是说：对于每一个算子 A 和每一个正数 δ，对应着一个正数 ε，使得如果 $\|A-B\|<\varepsilon$，则 $r(B)<r(A)+\delta$. (证明从问题86即得.)谱不是连续的(问题85)；谱半径呢？

问题87. 下命题是否成立：对每一算子 A 和每一正数 δ，对应着一个正数 ε，使得如果 $\|A-B\|<\varepsilon$，则 $|r(A)-r(B)|<\delta$？等价地，如果 $A_n\to A$，可否推知 $r(A_n)\to r(A)$？

这是难解的. 注意问题85的例对此无所启示；在该例中，序列的每一项及其极限的谱半径都等于1.

第十二章 强和弱拓扑

88. 算子的诸拓扑. 希耳伯特空间有两个有用的拓扑(弱的和强的)；希耳伯特空间上的算子空间则有若干个. 由范数诱导出的距离拓扑是其中之一；为与其他拓扑相区别，它常被称为*范数拓扑*或*一致拓扑*. 其次两个是矢量的强和弱拓扑关于算子的自然派生物. *强算子拓扑*的一个子基是形如

$$\{A:\|(A-A_0)f\|<\varepsilon\}$$

的一切集的集类；相应地强算子拓扑的一个基是形如

$$\{A:\|(A-A_0)f_i\|<\varepsilon,\ i=1,\ \cdots,\ k\}$$

的一切集的集类．这里，k 是一正整数，$f_1, \cdots, f_k$ 是矢量，而 ε 是一正数．弱算子拓扑的一个子基是形如

$$\{A: |((A-A_0)f, g)| < \varepsilon\}$$

的一切集的集类，其中 f 和 g 表示矢量而 $\varepsilon>0$；同上（同一般拓扑空间），一个基是这样的集（子基）的一切有限交的集类．与此相应的收敛（序列的和网的）概念不难描述：$A_n \to A$（强）当且只当对每一 f 有 $A_n f \to Af$（强）（即是，对每一 f 有 $\|(A_n - A)f\| \to 0$），而 $A_n \to A$（弱）当且只当对每一 f 有 $A_n f \to Af$（弱）（即是，对每一 f 和 g 有 $(A_n f, g) \to (Af, g)$）．

最容易解决的是关于顺序比较的问题．弱拓扑小（弱）于强拓扑，而强拓扑小于范数拓扑．换句话说，每一弱开集是一强开集，而每一强开集是依范数开的．再换句话说，每一算子的每一弱邻域包含该算子的一个强邻域，而每一强邻域包含一个距离邻域．又：依范数收敛蕴涵强收敛，而强收敛蕴涵弱收敛．这些事实从定义立即推得．当有关的收敛性在单位球上具有一致性时，这些蕴涵关系是可逆的（参看问题 16）．

问题 88．如果对 $\|g\|=1$，有 $(A_n f, g) \to (Af, g)$（一致），则 $\|A_n f - Af\| \to 0$；又若对 $\|f\|=1$，有 $\|A_n f - Af\| \to 0$（一致），则 $\|A_n - A\| \to 0$．

89．范数的连续性． 在拓扑代数结构（如一个希耳伯特空间上的算子代数，赋以一个适当的算子拓扑）的研究中，某些对象的连续性的证明常是单调乏味的；有趣的问题倒出现于证明某些对象是不连续的．例如的确有，算子上的线性运算 $(\alpha A+\beta B)$ 对其所有变元说是全面连续的，但其证明只包含常规步骤（从未曾通过这个常规步骤的读者在继续学习之前必须对此证明进行核验）．下面是一个容易但不那么机械的有关问题．

问题 89．三个拓扑（范数，强，弱）中哪一个使范数（即函数 $A \to \|A\|$）连续？

90．伴随映射的连续性．

问题 90．三个拓扑（范数，强，弱）中哪一个使伴随映射（即映

射 $A\to A^*$)连续?

91. 乘法的连续性. 最有用而又最顽固的问题是论及乘积的. 由于乘积(与范数和伴随不同)是一个二元函数,关于乘积的连续性陈述有一个"一并"的,也有一个"分别"的解释. 如果没有反面的说明,这样的陈述通常依"一并"的意义解释之,这就是说,把它们所讨论的对象解释成把序偶 $\langle A, B\rangle$ 映成乘积 AB 的映射(的连续性).

问题 91. 乘法关于一致拓扑是连续的而关于强和弱拓扑是不连续的.

证明是容易的,但反例则甚难;最简捷的反例有赖于某些奇诡的机巧.

92. 乘法的分别的连续性. 虽然乘法关于强或弱拓扑都不是一并地连续的,它关于这两个拓扑对每一变元说都是"分别地"连续的. 一个稍为准确的表达方式可陈述如下.

问题 92. 映射 $A\to AB$(对固定的 B)和 $B\to AB$(对固定的 A)都是强连续又是弱连续的.

93. 乘法的序列连续性. 乘法的(强和弱的)分别的连续性是一并连续性的一个较弱的代替物;另一个较弱(但有时有用)的代替物是序列意义下的一并连续性.

问题 93. (a) 如果 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 分别是强收敛于 A 和 B 的算子序列,则 $A_nB_n\to AB$(强). (b)如果在假设和结论中都以"弱"代"强",这个断语是否仍旧成立?

94. 自伴算子的增加序列. 一个自伴算子的有界增加序列必弱收敛(于必然是自伴的算子). 为要看出这道理,可设 $\{A_n\}$ 是自伴算子的一个增加序列(即对一切 n 和一切 f,有 $(A_nf, f)\leqslant(A_{n+1}f, f)$),以 α 为界(即对一切 n 和一切 f 有 $(A_nf, f)\leqslant\alpha\|f\|^2$). 如果 $\psi_n(f)=(A_nf, f)$,则每一 ψ_n 是一个二次形式. 上述假定蕴涵序列$\{\psi_n\}$是收敛的从而(解 1)极限 ψ 是一个二次形式. 由此推知 $\psi(f)=(Af, f)$对某一(必然是自伴的)算子 A 成立;再用极化方法就得到 $A_n\to A$ (弱)的结论.

关于强和一致拓扑是否可推得同样结论？

问题 94. 自伴算子的有界增加序列是否必是强收敛的？是否必是一致收敛的？

95. 平方根. 正算子必有唯一正平方根的断语是谱定理的一个容易的推论. 可是在谱理论的某些探讨中，平方根的存在证明在先，而谱定理则基于该结果. 下述断语指明如何不用谱定理也可得到平方根.

问题 95. 如果 A 是一个使得 $0\leqslant A\leqslant 1$ 成立的算子，又若序列 $\{B_n\}$ 是由方程

$$B_0=0 \quad 且 \quad B_{n+1}=\frac{1}{2}((1-A)+B_n^2),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

递归地定义的一个序列，则序列 $\{B_n\}$ 强收敛. 如果 $\lim\limits_n B_n=B$，则 $(1-B)^2=A$.

96. 两投影的下确界. 如果 E 和 F 是具有值域 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的投影，则利用 E 和 F 去求出到 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的各种几何构成物上的投影，有时容易，有时也很难. 如果 E 和 F 可交换，事情很可能是好办的. 譬如，如果 $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$，则容易求出以 $\mathbf{N}\cap\mathbf{M}^{\perp}$ 为值域的投影，又若 $\mathbf{M}\perp\mathbf{N}$，则容易求出以 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ 为值域的投影. 当没有类此的特殊假定时，问题却变得更有趣了.

问题 96. 如果 E 和 F 是值域为 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的投影，求值域为 $\mathbf{M}\cap\mathbf{N}$ 的投影 $E\wedge F$.

问题是要求出所述投影的一个"表示式". 虽然大多数数学家将带着同情的谅解来读类似这样的问题的陈述，但必须承认，严格地说，它毫无实际的意义. 要使它成为有精确意义的(陈述)，最明显的方法是先描述某些算子的类，要求它们在某些熟悉的代数和拓扑运算下是封闭的，然后试去证明每当 E 和 F 属于这样的一个算子类，则 $E\wedge F$ 也是如此. 与此有关联的最著名且有用的(算子)类是各种 von Neumann 代数 (von Neumann 称为"算子环"). 一个 von Neumann 代数就是一个自伴(即在求伴随运算

下封闭)、含有1且强闭(即关于强算子拓扑是闭的)的算子代数(即一个在加法和乘法下封闭且在任意数量的乘法下封闭的算子类).于是对于 von Neumann 代数,上述问题就是要证明:如果一个 von Neumann 代数含有两投影 E 和 F,则它也含有 $E\wedge F$.

参考资料:von Neumann[1950, Vol. 2, p. 55].

第十三章 部分等距变换

97. 正规算子的谱映射定理. 正规算子组成已知的最易研究的算子类,关于它们的最重要的陈述是谱定理. 学习算子理论者一般都同意说,谱定理的有限维说法必须与对角形式打交道(每一个有限的正规矩阵酉等价于一个对角的矩阵).适用于无穷维空间的一般说法没有一个被普遍地接受的表达方式. 起中心作用的有时是函数代数的有界的算子表示,而有时则是带有非正统的乘法性质的 Stieltjes 积分.有一个简短而有力的陈述,它没有达到最大的普遍性(它每一次仅适用于一个算子,而非适用于算子代数),但它确以谱定理的所有经典表达方式作为其容易的推论,而且它是关于对角形式的熟悉陈述的径捷的推广,这也是它的优点. 在下文中,该陈述将被称为谱定理;它说的是每一正规算子酉等价于一个乘法. 这个陈述恰可用通常证明谱定理的同样技巧来证明;参看 Halmos[1963], Dunford-Schwartz[1963, pp. 911~912].

谱定理的乘法说法有一个技巧上的缺点:它所用的测度可能不是 σ-有限的. 这也不碍事,有两个理由. 首先,在乘法的处理中,σ-有限性的假定只是为了方便,不是必要的(参看 Segal[1951]). 其次,仅当基础空间非可分时才必须考虑非 σ-有限测度;算子的变态才会带来测度的变态. 今后当涉及谱定理时,读者可在下列两法中任选其一:讨论一般情形,并保持必要的警惕;或限于注意可分的情形,宁可在普遍性上稍受损失,但却易于进行研究.

不使用谱定理，可能使某些证明冗长而且烦琐，但在某些文献中，有些作者宁愿这样做．由此带来的繁冗证明常见于数学的许多部分中．许多大定理的不幸就在于它们常常被敬而远之，不是被敬而用之．这并不是由于数学上的胡闹．长而"初等"的证明往往提供更多的洞察力而且引致更有成果的推广，而且胜于利用有力的，但过于专门的工具的简短的证明．

这并不是说，要不惜任何代价地避免使用谱定理．强有力的一般定理的存在就是为了要被应用，有意避免它们至少会象赢得洞察力一样频繁地会失去洞察力．例如，对"每一个正算子有一个正平方根"，谱定理给出一个直接而清晰的证明（因为每一正可测函数有一个平方根）；问题 95 的逼近技巧是有趣而且有用的，但它远不是那末明澈．再举一例，考虑断语：谱由两数 0 和 1 组成的自伴算子是一个投影．要证明它，可令 A 表该算子，并记 $B=A-A^2$．显然，B 是自伴算子，且据谱映射定理，$\Lambda(B)=0$．这蕴涵 $\|B\|=r(B)=0$ 从而 $B=0$（范数等于谱半径对于一切正规算子成立，但对自伴算子说，这完全是初等的；参看 Halmos [1951, p. 55]）．试将此证明与使用谱定理的证明比较：如果 φ 是值域由两数 0 与 1 组成的函数，则 $\varphi^2=\varphi$．最后一个例子，试不用谱定理证明：每一具有实谱（即其谱包含于实轴中）的正规算子是自伴算子．

谱定理使得清楚而有效地描述所谓函数演算成为可能．如果 A 是正规算子，又若 F 是 $\Lambda(A)$ 上的有界 Borel 可测函数，则函数演算产生一个算子 $F(A)$．为了定义 $F(A)$，可以一个（譬如是在）测度空间 X 上的具有乘子 φ 的乘法代表 A；于是算子 $F(A)$ 就是由复合函数 $F\circ\varphi$ 诱导出的乘法．为要证实这是有意义的，必须知道 φ 把 X 的几乎每一点映入 $\Lambda(A)$；就是说，至多只要将 φ 的定义域改变一个零集，便可使 φ 的值域包含于它的本性值域．证明进行如下．据定义，$\Lambda(A)$ 的余集中每一点有一个邻域其在 φ 下的原象有测度 0．由于平面是一 Lindelöf 空间，可推知 $\Lambda(A)$ 的余集可以被这样的邻域的可列族所覆盖，从而 $\Lambda(A)$ 的整个余集的原象有测度 0．

映射 $F \to F(A)$ 有许多悦人的性质. 它的主要性质是, 它是一个同时也保持共轭性(即 $F^*(A)=(F(A))^*$)的代数同态; 由此推知, 例如, 如果 $F(\lambda)=|\lambda|^2$, 则 $F(A)=A^*A$. 出现于函数演算的应用中的函数 F 不恒是连续的(例如, Borel 集的特征函数具有重要性), 但连续函数有时更易于掌握. 下面的定理是一个谱映射定理, 它是很特殊的因为它仅涉及正规算子, 但它又是很一般的因为它容纳所有连续函数.

问题 97. 如果 A 是一个正规算子, 又若 F 是一个 $\Lambda(A)$ 上的连续函数, 则 $\Lambda(F(A))=F(\Lambda(A))$.

对非正规的 A, 类似 $F(A)$ 的某些东西有时似也有意义. 但上述结果不大可能还是真的. 例如假设 $F(\lambda)=\lambda^*\lambda(=|\lambda|^2)$, 并对于每一算子 A, 定义 $F(A)$ 为 A^*A. 陈述 $F(\Lambda(A))=\Lambda(F(A))$ 不可能成立; 作为反例, 试考虑单侧移位.

98. 部分等距变换. 一个等距变换是使得 $\|Uf\|=\|f\|$ 对一切 f 成立的线性变换 U(从一个希耳伯特空间到它本身, 或从一个希耳伯特空间到另一希耳伯特空间). 一个等距变换是一个保持距离的变换: 对一切 f 和 g 有 $\|Uf-Ug\|=\|f-g\|$. 一个线性变换是一个等距变换的充要条件是 $U^*U=1$, 的确: 条件(1) $\|Uf\|^2=\|f\|^2$, (2) $(U^*Uf, f)=(f, f)$, (3) $(U^*Uf, g)=(f, g)$ 和 (4) $U^*U=1$是两两等价的. (从(2)过渡到(3), 极化.)注意: 条件 $U^*U=1$ 与 $UU^*=1$ 不是等价的. 后一个条件当 U^* 是等距变换时被满足, 这时 U 称为一个共轭等距变换.

考虑等距地作用于一个希耳伯特空间的子集 (通常是一个线性流形, 但不必要是一个子空间)上的线性变换 U(这不过是说, 对该子集中的一切 f 有 $\|Uf\|=\|f\|$)有时是方便的. 一个部分等距变换是这样一个线性变换, 它在它的核的正交补上是等距的. 有两大类在某一意义下属于相对立的极端情形的部分等距变换的例子; 它们是等距变换(而特别是酉变换)和投影. 部分等距变换的定义从表面上看来是简单的, 而实际上隐藏着复杂性. 而这些例子把这种复杂性继续隐藏下去; 其实, 部分等距变换的结构可能是十

分复杂的．无论如何，易于证明部分等距变换是有界的；事实上如果 U 不是0，则 $\|U\|=1$.

一个部分等距变换的核的正交补时常称为它的始空间．部分等距变换的始空间就是使 $\|Uf\|=\|f\|$ 成立的 f 全体的集（需要证明的是如果 $\|Uf\|=\|f\|$，则 $f\perp\ker U$．记 $f=g+h$，其中 $g\in\ker U$ 而 $h\perp\ker U$，则 $\|f\|=\|Uf\|=\|Ug+Uf\|=\|Uh\|=\|h\|$；由于 $\|f\|^2=\|g\|^2+\|h\|^2$，可知 $g=0$)．部分等距变换的值域等于始空间的象且必须是闭的（由于 U 在始空间上是等距的，其象是完备距离空间)．对于部分等距变换说，值域有时称为终空间．

问题 98．有界线性变换 U 是一个部分等距变换当且只当 U^*U 是一个投影．

系 1．如果 U 是一个部分等距变换，则 U 的始空间是 U^*U 的值域．

系 2．一个部分等距变换的伴随变换还是一个部分等距变换，但始空间和终空间互换．

系 3．有界线性变换 U 是一个部分等距变换当且只当 $U=UU^*U$.

99．**极大部分等距算子**．对部分等距算子如下定义一个(半)序是自然的：如果 U 和 V 是部分等距算子，当 V 在 U 的始空间上与 U 全同时，记 $U\leqslant V$．这蕴涵 U 的始空间包含于 V 的始空间中(参看问题 98 中所给始空间的特征)．由此推知，如果关于目前的序有 $U\leqslant V$，则关于算子的通常的序 $U^*U\leqslant V^*V$（"通常的"序，通常只就自伴算子考虑，按照它，$A\leqslant B$ 当且只当对一切 f 有 $(Af,f)\leqslant(Bf,f)$．注意在这个意义下，$U^*U\leqslant V^*V$ 等价于对一切 f 有 $\|Uf\|\leqslant\|Vf\|$)．逆命题不成立；如果对于部分等距算子 U 和 V，所知道的只是 $U^*U\leqslant V^*V$，则可以相信，U 的始空间包含于 V 的始空间，但不能得出 U 和 V 必须在较小的始空间上全同的结论．

如果 $U^*U=1$，就是说，如果 U 是等距算子，则仅有的不小于 U 的部分等距算子就是 U 本身：一个等距算子是一个极大部分等

距算子. 有没有任何别的极大部分等距算子？得到答案的一条途径是注意到，如果 $U\leqslant V$，则 U 的终空间(亦即 U^* 的始空间)包含于 V 的终空间(V^* 的始空间)，而且还有，V^* 在 U^* 的始空间上与 U^* 全同. 换句话说，如果 $U\leqslant V$，则 $U^*\leqslant V^*$ 从而特别有 $UU^*\leqslant VV^*$. 这蕴涵如果 $UU^*=1$，即如果 U 是共轭等距算子，则 U 也是极大的. 如果一个部分等距算子既不是等距又不是共轭等距算子，则 U 和 U^* 都有非零核. 在这情况下，易于把 U 扩大成这样的一个部分等距算子. 它把 $\ker U$ 中一个预先指定的单位矢映成 $\ker U^*$ 中一个预先指定的单位矢(而且它在 $(\ker U)^\perp$ 上当然与 U 全同). 结论：一个部分等距算子是极大的当且只当它或其伴随算子是一个等距算子.

算子要成为极大部分等距算子的容易的途径是作为酉算子. 如果 U 在 $\mathbf{H}$ 上是酉算子，又若 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个子空间，则 $\mathbf{M}$ 约化 U 的一个充分必要条件是 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$. 如果 U 仅是一个部分等距算子则可能发生这样的情况：$U\mathbf{M}=\mathbf{M}$ 但 $\mathbf{M}$ 不约化 U，也可能发生：$\mathbf{M}$ 约化 U 但 $U\mathbf{M}\neq\mathbf{M}$. 如果 U 是极大部分等距算子则又如何？

问题 99. 当 U 是极大部分等距算子时，试发现命题“$U\mathbf{M}=\mathbf{M}$”与“$\mathbf{M}$ 约化 U”间的蕴涵关系.

100. 部分等距算子集的闭包和连通性. 有些关于部分等距算子的陈述之所以稍微显得笨拙，只是由于 0 必须算作它们(部分等距算子)中的一个，算子 0 是部分等距算子集的一个孤立点；它是单位球内部仅有的一个部分等距算子，由此可以推知，(例如)部分等距算子全体的集显然不是连通的. 单位球边界上的部分等距算子则如何？

问题 100. 一切非零部分等距算子的集(关于算子的范数拓扑)是闭的但不是连通的.

101. 秩、余秩和零秩. 如果 U 是部分等距算子，记 $\rho(U)=\dim\operatorname{ran}U$，$\rho'(U)=\dim(\operatorname{ran}U)^\perp$，又 $\nu(U)=\dim\ker U$ (U 是部分等距算子这一点在这些定义中实际是不重要的；对任意算子也可

以下相似的定义)．这三个基数，分别称为 U 的秩，余秩和零秩，不是完全相互独立的；它们是这样的：$\rho+\rho'$ 和 $\rho+\nu$ 两者都等于基础希耳伯特空间的维数．(注意：无穷基数的减法是"滑移"的；不能推知 $\rho'=\nu$)．容易看出，如果 ρ, ρ' 和 ν 是任意三个使得 $\rho+\rho'=\rho+\nu$ 的基数，则存在具有秩 ρ，余秩 ρ' 和零秩 ν 的部分等距算子(对称性要求考虑 $\nu'(U)=\dim(\ker U)^{\perp}$，$U$ 的余零秩；但它无关重要，由于 U 在$(\ker U)^{\perp}$ 上是等距的，可推知 $\nu'=\rho$)．

回忆起如果 U 是部分等距算子，则 U^* 也如此；U^* 的始空间是 U 的终空间，反之亦然．由此推知 $\nu(U^*)=\rho'(U)$ 而 $\rho'(U^*)=\nu(U)$．

函数 ρ, ρ' 和 ν 之所以有用，其理由之一在于它们是连续函数．为了解释这个陈述，可对(一个固定的希耳伯特空间上的)部分等距算子的空间 $\mathbf{P}$ 使用范数拓扑而对基数使用离散拓扑．这样说明之后连续性陈述的意义变得明确了：如果 U 充分接近 V，则 U 和 V 有相同的秩，相同的余秩以及相同的零秩．下列断语是该结果的一个精确的定量的表达方式．

问题 101．如果 U 和 V 是使得 $\|U-V\|<1$ 成立的部分等距算子，则 $\rho(U)=\rho(V)$，$\rho'(U)=\rho'(V)$，而且 $\nu(U)=\nu(V)$．

对每一固定的 ρ, ρ' 和 ν，令 $\mathbf{P}(\rho, \rho', \nu)$表示(在一固定的希耳伯特空间上)具有秩 ρ，余秩 ρ' 和零秩 ν 的部分等距算子所成的集．很清楚，形如 $\mathbf{P}(\rho, \rho', \nu)$的诸集形成部分等距算子全体组成的空间 $\mathbf{P}$ 的一个分割；每一集 $\mathbf{P}(\rho, \rho', \nu)$是又开又闭的，这是问题 101 的陈述的一个推论．由此推知等距算子$(\nu=0)$全体的集又开又闭，而酉算子$(\rho'=\nu=0)$全体的集也是如此．

102．部分等距算子的空间的分支． 如果 φ 是一个测度空间上的可测函数，使得$|\varphi|=1$ 几乎处处成立，则在该空间上存在一个可测实值函数 θ 使得 $\varphi=e^{i\theta}$ 几乎处处成立．这是容易证明的．它实质上说的是一个可测函数恒有一个可测对数．理由是，指数函数在复平面中原点的余集上有一个(事实上有许多) Borel 可测

的反函数(在负实轴的余集上选一个连续的对数，然后扩张它，要求在(譬如说)上半平面上的单侧连续性)．

用函数演算的语言，前段结果可以如下表达：如果 U 是酉算子，则存在一个自伴算子 A，使得 $U=e^{iA}$ 成立．如果 $U_t=e^{itA}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 $t\to U_t$ 是一条联结 $1(=U_0)$ 到 $U(=U_1)$ 的酉算子的连续曲线．结论：酉算子全体的集是弧连通的．用问题 101 的记号表示，(一个维数 ρ 的希耳伯特空间上的)开闭集 $\mathbf{P}(\rho, 0, 0)$ 是连通的；它是部分等距算子全体的集 $\mathbf{P}$ 的一个分支．问题：其他分支是什么？答：形如 $\mathbf{P}(\rho, \rho', \nu)$ 的诸集．

问题 102．(在同一个希耳伯特空间上的)每一对具有相同的秩、余秩和零秩的部分等距算子都可以用具有同样的秩，余秩和零秩的部分等距算子的连续曲线联结起来．

103．关于部分等距算子的酉等价性． 如果 A 是压缩算子(意指 $\|A\|\leqslant 1$)，则 $1-AA^*$ 是正的．由此推知存在一个唯一的正算子其平方等于 $1-AA^*$，称之为 A'．断语：算子矩阵

$$M(A)=\begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个部分等距算子．(利用问题 98 的)证明：检验 $MM^*M=M$．推论：每一压缩算子能被扩张成一个部分等距算子．

问题 103．如果 A 与 B 是酉等价的压缩算子，则 $M(A)$ 与 $M(B)$ 也是酉等价的；如果 A 和 B 是可逆的压缩算子，则逆命题也成立．

从一个可能是"坏的"算子 A 可制造出一个"好的"算子，这有许多方法．样本：$A+A^*$ 和

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}.$$

这些方法中没有一个能产生足够多有用的 A 的酉不变式．如果 A 与 B 酉等价，则它们出现于其中的各种构造也是如此，通常这是易证的．可是，如果这些构造是酉等价的，则原算子亦然，这命题通常却是谬误的．问题 103 的断语的主要兴趣在于，对于它

所讨论的特殊的部分等距构造说，逆命题却碰巧成立。

结果是，关于一个显然是很小的算子类（部分等距算子类）的酉等价问题是等价于关于远较广大的可逆压缩算子类的（酉等价）问题．可逆压缩算子的酉等价问题接着又显易地等价于关于任意算子的酉等价问题．理由是，经过一个平移（$A \to A+\alpha$）和一个尺度改变（$A \to \beta A$），每一算子会变成一个可逆压缩算子，而平移和尺度改变不影响及酉等价性．所有这一切的最终结果是把一般酉等价问题约化成关于部分等距算子（的酉等价）的特例．

104．部分等距算子的谱． 一个复数的集要满足什么条件才能成为某一个部分等距算子的谱？由于部分等距算子是一个压缩算子，其谱必然是闭单位圆域的一个子集．如果一个部分等距算子的谱不含原点，就是说，如果一个部分等距算子是可逆的，则它是酉算子，而因此，它的谱是单位圆（周）的一个子集．由于单位圆的每一个非空紧子集是某一酉算子的谱（参看问题 48），刻划可逆部分等距算子的谱的问题已得到解决．关于不可逆的又如何？

问题 104． 为了使一个复数集是某一非酉部分等距算子的谱，它必须满足什么条件？

105．极分解． 每一复数是一个非负数与一个模为 1 的数的乘积；除对于数 0 外，这个极分解是唯一的．推广于有限矩阵，则有每一复矩阵是一个正矩阵与酉矩阵的乘积．如果所给的矩阵是可逆的，又若对因子的次序加以指定（UP 或 PU），则再一次得到这极分解的唯一性．要得到关于每一矩阵的满意的唯一性定理是可能的，但必须付出改变所允许的因子的种类的代价；部分等距算子就从这里有益地进入有限维矢量空间的研究中．在无限维的情形，部分等距算子就成为不可避免的．说每一希耳伯特空间上的算子等于乘积 UP，于此，U 是酉算子而 P 是正算子，这命题不成立，而且即使仅要求 U 是等距的，命题仍旧不能成立．（具体反例的构造现在可能是不明显的，但不久它将是一般理论的一个容易的副产品．）正确的陈述对于两不同空间之间的变换不会比对于一个空间上的算子增加难度。

问题 105. 如果 A 是从希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 到希耳伯特空间 $\mathbf{K}$ 的有界线性变换，则存在一个(从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$)的部分等距变换 U，又存在一个($\mathbf{H}$ 上的)正算子 P，使得 $A=UP$ 成立．可以寻求变换 U 和 P 使得 $\ker U=\ker P$，而这个另加的条件唯一地确定了它们．

把 A 表成满足上述条件的唯一的 U 和 P 的乘积的表示式称为 A 的极分解，或者更准确地说，A 的右方极分解．对应的左方(极分解)($A=PU$)的理论，系统地利用伴随变换便可得到．

系 1．如果 $A=UP$ 是 A 的极分解，则 $U^*A=P$．

系 2．如果 $A=UP$ 是 A 的极分解，则 U 是一个等距变换的充要条件是 A 是一对一的，而 U 是一个共轭等距变换的充要条件是 A 的值域稠密．

106．极大极表示．

问题 106．每一有界线性变换是一个极大部分等距变换与一个正算子的乘积．

107．端点． 算子空间中的闭单位球是凸的，对每一有趣味的凸集，确定其端点是有趣的．

问题 107．希耳伯特空间上的算子空间中的闭单位球的端点是什么？

108．拟正规算子． 正规性的条件可从不同途径减弱，其中最初等的(途径)引导到拟正规性的概念．算子 A 称为拟正规的，是指 A 与 A^*A 可交换．很清楚，每一正规算子是拟正规的，逆命题显然不成立．作为一例，如果 A 是等距算子，则 $A^*A=1$，从而 A 与 A^*A 可交换，但如果 A 不是酉算子，则 A 不是正规的(具体例子可考虑单侧移位)．

问题 108．具有极分解 UP 的算子当且只当 $UP=PU$ 时是拟正规的．

拟正规算子首先被 Brown[1953](在另一名称下)引入并研究．

109．可逆算子集的稠密性． 偶然有这样的情形，一个定理对

可逆算子说易于证明而对一般情形则难于捉摸. 每一有限(方)矩阵是可逆矩阵的极限, 这一点因此很有用. 在无穷维情形, 对正规算子说, 逼近方法不难施行(引用谱定理, 用一个乘法代表给定的算子,改变乘子的较小的值,用下有界的算子逼近它). 可是如果空间是无穷维的,算子又非正规,则有些麻烦.

问题 109. *有左逆或右逆的算子全体的集是稠密的, 但既有左逆又有右逆的算子全体的集(即可逆算子全体的集)则否。*

110. 可逆算子集的连通性.

问题 110. *可逆算子全体的集是连通的。*

第十四章 单侧移位

111. 正规算子的约化子空间. 能够把正规算子约化到具有各种预期性质的子空间上来进行研究, 这是谱定理的主要成就之一. 谱定理提供了许多约化子空间, 下面的断语就是说明这个事实的一种说法.

问题 111. *如果 A 是无穷维希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的正规算子, 则 $\mathbf{H}$ 可表示为可数个 A 的约化子空间的直接和, 这可数个子空间具有相同的无穷维数。*

112. 对称的乘积. 对称就是一个对合酉算子,也就是一个使得 $Q^*Q=QQ^*=Q^2=1$ 的算子 Q. 在这里可以提醒读者: 一个算子如具有"酉","对合"和"自伴"三性质中之二, 必具有第三性质; 其证明完全是初等的代数演算.

问题 112. *讨论下述断语: 每一酉算子是有限个对称的乘积.*

113. 单侧移位与正规算子. 问题 111 的要旨是帮助解决问题 112(同时, 附带地, 也提供了谱定理的一个不算不足道的应用). 问题 112 的要旨是强调某些移位算子的作用. 移位(包括以前介绍的简单单侧和双侧移位)是算子理论中的基础工具. 单侧移位特别具有许多奇特的性质,既有代数的,也有分析的. 即使有时这些性质本身看不出有什么直接应用, 发见和证明它们的技巧也

时常是有价值的．下面是三个样本的问题．

问题 **113**．(a)单侧移位都是有限个正规算子的乘积吗？(b)单侧移位的实部的范数是什么数？(c)单侧移位离开正规算子的集多远？

最后的问题就是下面这个非正式的问题的认真的提法："单侧移位离开成为正规算子还差多远？"这个问题可以就每一个算子提出，其答案是一个(关于)酉(变换的)不变式，它有时是有用的．

114．移位的平方根．

问题 **114**．单侧移位有平方根吗？换句话说，如果 U 表示单侧移位，是否存在一个算子 V 使得 $V^2=U$？

115．双侧移位的换位． 算子(或算子集)的换位是与该算子(或与该算子集中的每一算子)可交换的算子全体的集．换位是关于一个算子应该知道的最有用的事情之一．所谓重数理论的一个最重要目的就是要讨论正规算子的换位．在某些特例中，换位的判定可以使用比较初等的方法来完成；当前的例子就是双侧移位．

双侧移位 W 可以看做单位圆的 $\mathbf{L}^2$ 空间上的用 e_1 乘的乘法算子(参看问题 68)．在这里，$e_n(z)=z^n (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 当 $|z|=1$，$\mathbf{L}^2$ 按规范化了的勒贝格测度构成．

问题 **115**．双侧移位的换位是乘法算子全体的集．

系． 双侧移位的每一约化子空间由单位圆的一个 Borel 子集 M 确定，即该子空间由($\mathbf{L}^2$ 中)在 M 外取零值的函数全体构成．

主命题和系都有自然的推广，这些推广是用相同代价得到的．把单位圆换成复平面上一个任意的有界 Borel 集 X，同时把勒贝格测度换成 X 中的任一有限 Borel 测度，就可以得到这些推广．双侧移位的推广是由 e_1 诱导的乘法($e_1(z)=z$，对 X 中一切 z)．

116．单侧移位的换位． 单侧移位是双侧移位在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制．把双侧移位看做一个乘法，它的换位可以描述为同一个 $\mathbf{L}^2$ 上的乘法全体的集(问题 115)．这个说法提示一个表面上似乎有理的猜测：单侧移位的换位可能由乘法算子在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制全

体组成. 略一深思就发觉这是谬误的: $\mathbf{H}^2$ 在乘法下不一定是不变的, 从而乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制不一定是 $\mathbf{H}^2$ 上的算子. 可是, 如果乘子本身在 $\mathbf{H}^2$ 中(从而在 $\mathbf{H}^\infty$ 中), 则 $\mathbf{H}^2$ 在它所诱导的乘法下是不变的(参看问题 27), 而上面的猜测就有意义了.

问题 116. 单侧移位的换位就是由属于 $\mathbf{H}^\infty$ 的乘子诱导的乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制全体的集.

系. 单侧移位是不可约的. 意即: 它仅有的约化子空间是 $\{0\}$ 和 $\mathbf{H}^2$.

和双侧移位一样, 主命题有一个自然的推广. 把单位圆换成复平面的任意 Borel 子集 X, 把勒贝格测度换成 X 中的任意一个有限 Borel 测度 μ. $\mathbf{H}^2$ 的推广, 有时表示成 $\mathbf{H}^2(\mu)$, 是诸函数 e_n, $n=0, 1, 2, \cdots$, 在 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 中的张成子空间, 这里的 $e_n(z)=z^n$, 对 X 中一切 z. 单侧移位的推广是 e_1 诱导的乘法在 $\mathbf{H}^2(\mu)$ 上的限制.

系的推广不象主命题那样顺利. 麻烦处在于 $\mathbf{H}^2(\mu)$ 在 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 内部的构造密切地依赖于 X 和 μ. 例如, 可能出现 $\mathbf{H}^2(\mu)=\mathbf{L}^2(\mu)$.

单侧移位的换位的特征引致"U 没有平方根" (解 114) 这个断语的另一个奇特的证明, 并且相应地使我们洞察该断语的实质. 的确, 如果 $V^2=U$, 则 V 与 U 可变换, 因此 V 是由 $\mathbf{H}^\infty$ 中一个函数 φ 诱导的乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制. 施行 V^2 于 e_0 同于施行 U 于 e_0, 由此可推断 $(\varphi(z))^2=z$ 几乎处处成立. 这蕴涵着在单位圆域上有 $(\tilde{\varphi}(z))^2=z$ (参看解 34), 就是说, 函数 $\tilde{e}_1$ 有一个解析的平方根; 这样就得到了矛盾.

117. 以极限表示单侧移位的换位.

问题 117. 每一个与单侧移位可交换的算子都是一个单侧移位的多项式序列(在算子强拓扑下)的极限.

118. 等距算子的特征. 等距算子象个什么? 有些等距算子是酉算子, 有些不是; 单侧移位就是后者的一例. 由于等距算子的(有限或无穷的)直接和还是个等距算子, 上述两种类型的混合物

也是可能的．更精确地说，一个酉算子和若干个(有限个或无穷多个)单侧移位的直接和是一个等距算子(没有必要讨论酉算子的直接和——它们与其直和加项一样地是酉算子)．循此方向，有一个有用的定理说：上述方法是构成等距算子的唯一方法．由此得知单侧移位不仅是具有有趣和独特的性质的一个等距算子的例子；它事实上是许多基本积木中的一块，利用这些积木可以构造成一切等距算子．

问题 118．*每一等距算子或是酉算子，或是一个或多个单侧移位的直接和，或是一个酉算子与若干个单侧移位的直接和．*

没有酉算子直和加项的等距算子叫做*纯等距算子*。

119．移位到酉算子的距离．

问题 119．*单侧移位与酉算子的集相距多远？*

120．通过酉部分的约化．每一等距算子可分解成酉部分和纯部分(问题 118)．如果酉部分作用于子空间 $\mathbf{M}$ 上，则 $\mathbf{M}$ 约化所给的等距算子，因而约化该等距算子的每个多项式．$\mathbf{M}$ 是否也约化每一个与该等距算子可交换的算子？

问题 120．*等距算子的酉部分的定义域是否约化每一个与该等距算子可交换的算子？*

121．移位作为万能算子．如果 U 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的等距算子且存在 $\mathbf{H}$ 中的一个单位矢量 e_0 使得矢量 $e_0, Ue_0, U^2e_0, \cdots$形成 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基，则 U(显然)酉等价于单侧移位．稍微随便一些，也可以说 U 就是单侧移位．单侧移位的这个特征可以重新阐述如下：U 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上这样一个等距算子，对于它说，存在一个一维子空间 $\mathbf{N}$ 使得子空间 $\mathbf{N}, U\mathbf{N}, U^2\mathbf{N}, \cdots$ 两两正交而且张成 $\mathbf{H}$．如果存在这样的子空间 $\mathbf{N}$，它一定等于余值域$(U\mathbf{H})^\perp$．考虑到这个论点，还有另一种稍为不同的说法：单侧移位就是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上具有余秩 1 的等距算子，它使得子空间$(U\mathbf{H})^\perp, U(U\mathbf{H})^\perp, U^2(U\mathbf{H})^\perp, \cdots$ 张成 $\mathbf{H}$(由于 U 是等距算子，可知它们两两正交)．这些评注大部分已隐含于解 118 中．

推广已近在眉睫．考虑希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个等距算子 U，它使得子空间$(U\mathbf{H})^{\perp}$，$U(U\mathbf{H})^{\perp}$，$U^2(U\mathbf{H})^{\perp}$，… 两两正交且张成 $\mathbf{H}$，但不必对余秩的值加以限制．每一个这样的等距算子可以叫做一个移位(单侧移位)．移位的余秩(也叫做它的重数)构成它的一个酉不变式全系；原来的单侧移位可以(在酉等价范围内)确定为重数 1 的移位(简单单侧移位)．

高重数单侧移位与简单移位同样地重要．问题 118 指明它们正是纯等距算子.在一切算子,不仅是等距算子的研究中,它们起了重要的作用;它们,确切地说,它们的伴随算子,应该是万能算子．

算子的一个"部分"就是该算子在一个不变子空间上的限制．等距算子的每一部分是等距算子；关于单侧移位的部分的研究看不出会出现什么新的东西．单侧移位的伴随算子的部分则如何?如果 U 是单侧移位,则$\|U\|=\|U^*\|=1$,由此得知如果 A 是 U^* 的一个部分,则$\|A\|\leqslant 1$．由于在强拓扑中还有 $U^{*n}\to 0$(参看解 90)，得知 $A^n\to 0$(强)．奇迹般的而且有用的事实是,这两个显然地必要的条件同时也是充分的；参看 Foias [1963] 和 de Branges-Rovnyak [1964, 1965]．

问题 121．每一个其幂强收敛于 0 的压缩算子酉等价于单侧移位的伴随算子的一个部分．

122．与移位的部分的相似性．对于许多目的来说,相似性不逊于酉等价性．怎样的一个算子 A 会相似于移位 U 的伴随算子的一个部分？由于相似性不保持范数,关于$\|A\|$，没有什么明显的必须满足的条件．可是有一种确实保持相似性的(算子)大小的量度,就是谱半径;由于 $r(U^*)=1$,可知 $r(A)\leqslant 1$．容易看出这个必要条件不是充分的. 其理由是,关于酉等价的必要条件之一($A^n\to 0$(强),参看问题 121)对于相似性也是必要的(就是说：如果 $A^n\to 0$(强),又 $B=S^{-1}AS$，则 $B^n\to 0$(强))．由于有许多算子 A 使得 $r(A)\leqslant 1$ 但是 A^n 在任何意义下不趋于 0(例：1)，关于谱半径的条件显然不是充分的．有一个仅与谱半径有关的条件，它对于与移位的伴随算子的一个部分相似的性质是充分的，但它比 $r(A)\leqslant 1$

强了不少；事实上它就是 $r(A)<1$.

问题 122. 谱包含于单位圆域内部的每一个算子相似于一个其幂强收敛于 0 的压缩算子.

系 1. 谱包含于单位圆域内部的每一个算子相似于单侧移位的伴随算子的一个部分.

系 2. 谱包含于单位圆域内部的每一个算子相似于一个真压缩算子.

(真压缩算子就是使 $\|A\|<1$ 的一个算子 A.)

系 3. 每一个拟幂零算子相似于具有任意小范数的算子.

这些简单然而美妙而一般的结果属于 Rota[1960].

系 4. 每一算子 A 的谱半径是数 $\|S^{-1}AS\|$ 关于一切可逆算子 S 的下确界.

123. 游动子空间. A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个算子, $\mathbf{H}$ 的子空间 $\mathbf{N}$ 叫做关于 A 游动如果它正交于它在 A 的一切正幂下的象. 这个概念在研究等距算子时特别有用. 如果 U 是等距算子而 $\mathbf{N}$ 是关于 U 的游动子空间, 则当 m 和 n 是不相等正整数时, 恒有 $U^m\mathbf{N}\perp U^n\mathbf{N}$. 换句话说, 如果 f 和 g 属于 $\mathbf{N}$, 则 $U^mf\perp U^ng$. (证明: 约化为 $m>n$ 的情形, 注意 $(U^mf, U^ng)=(U^{*n}U^mf, g)=(U^{m-n}f, g)$). 如果 U 是酉算子, 还有更多结果, 此时当 m 和 n 是两个不相等的正、负整数或 0 时, 恒有 $U^m\mathbf{N}\perp U^n\mathbf{N}$ (证明: 求 k 使 $m+k$ 和 $n+k$ 都是正的, 注意 $(U^mf, U^ng)=(U^{m+k}f, U^{n+k}g)$).

游动子空间是重要的, 因为它们在如下的意义下与不变子空间有联系: 如果 U 是一个等距算子, 则在一切游动子空间 $\mathbf{N}$ 与某些不变子空间 $\mathbf{M}$ 之间存在着自然的一一对应. 置 $\mathbf{M}=\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{N}$ 就给出这个对应. (为了证明这对应是一对一的, 注意到 $U\mathbf{M}=\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{N}$, 因此 $\mathbf{N}=\mathbf{M}\cap(U\mathbf{M})^{\perp}$.) 至少有一个算子, 就是单侧移位, 对于它说, 这对应是可逆的.

问题 123. 如果 U 是(简单)单侧移位而 $\mathbf{M}$ 是一个在 U 之

下不变的非零子空间，则存在(必然是唯一的)一维游动子空间 $\mathbf{N}$ 使得 $\mathbf{M}=\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{N}$.

连结着 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的方程可以用这样的说法表达，即简单单侧移位的每一非零部分是一个移位．加上 $\dim\mathbf{N}=1$ 可能是不显眼的改善，但却是有用的而且不是不足道的．从这些评论可以看出，下列的简洁命题仅是上述问题的重新表述：简单单侧移位的每一非零部分是(酉等价于)简单单侧移位．只须在陈述中作一些显然是适当的改变，几乎不必再费什么力气，上面的这些考虑都可以推广到高重数的移位去．

124．移位的特殊不变子空间． 希耳伯特空间理论的最顽固难攻的没有解决的问题之一是每一算子是否都有非平凡不变子空间．一个有希望、有趣而且有益的做法是检查一些具体的特殊情况，看它们的不变子空间的性态，借以累积实验资料．一个良好的可供探究的具体特例就是单侧移位．

有着两种不变子空间：一种是它们的正交补也是不变子空间(约化子空间)，以及其它一种．单侧移位没有约化子空间(问题116)；留下的问题是它有多少另一种不变子空间以及它们是什么样的子空间．

要得到单侧移位 U 的一个不变子空间，最容易的方法是固定一个正整数 k，并考虑 $n\geqslant k$ 的诸 e_n 的张成子空间 $\mathbf{M}_k$．在进行了这些初等的考察之后，学习本课题的大多数学生必须停下来想一想；是否还有其它不变子空间，这完全不是简单明显的问题．在这里，回忆一下 U 的谱性质是有助益的．其实，由于模小于 1 的每一复数 λ 是 U^* 的一个单重特征值(解 67)，具有相应的特征矢 $f_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{*n}e_n$，得知单元素集 $\{f_\lambda\}$ 的正交补就是一个在 U 下不变的非平凡子空间．

问题 124． 如果 $\mathbf{M}_k(\lambda)$ 表示 $\{f_\lambda, \cdots, U^{k-1}f_\lambda\}$ 的正交补($k=1, 2, 3, \cdots$)，则 $\mathbf{M}_k(\lambda)$ 在 U 下不变，$\dim\mathbf{M}_k^\perp(\lambda)=k$，且 $\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}_k^\perp(\lambda)$

$=\mathbf{H}^2$.

注意上面考虑的空间 $\mathbf{M}_k$ 同于空间 $\mathbf{M}_k(0)$.

125. 移位的不变子空间. 单侧移位有哪些不变子空间？空间 $\mathbf{M}_k$ 和它们的推广 $\mathbf{M}_k^{(\lambda)}$(参看问题124)是一些例子. 对它们施行格运算(交和张)又得到一些新例子，但并不怎么惊人，而且似乎已经泉源枯竭，不再有别的例子了. 但是放弃序列观点，接受函数观点，把 U 看做由 e_1 诱导的乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制，就能得到新的灵感.

问题125. *$\mathbf{H}^2$ 的非零子空间 $\mathbf{M}$ 在 U 下不变当且只当存在一个 $\mathbf{H}^\infty$ 中的函数 φ, φ 的模几乎处处等于常数1, φ 所诱导的乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制的值域就是 $\mathbf{M}$.*

这个基础性的结果属于 Beurling[1949]. 此后它受到相当程度的注意；参看 Lax[1959], Halmos[1961] 和 Helson[1964].

$\mathbf{M}$ 可以用比较非正式的语言描述为 φ 的倍(即是乘以 $\mathbf{H}^2$ 中的函数所得的倍式)全体的集. 相应地, $\mathbf{M}=\varphi\cdot\mathbf{H}^2$ 的记法是有启发性的. 象 φ($\mathbf{H}^\infty$ 中函数，模等于常数1)这样的函数被称为*内函数*，虽然没有什么有说服力的理由.

系1. *如果 φ 和 ψ 是使得 $\varphi\cdot\mathbf{H}^2\subset\psi\cdot\mathbf{H}^2$ 的内函数，则 φ 可被 ψ 整除，意即，存在一个内函数 θ 使得 $\varphi=\psi\cdot\theta$. 如果 $\varphi\cdot\mathbf{H}^2=\psi\cdot\mathbf{H}^2$, 则 φ 与 ψ 互为常数倍，以模1的常数为倍数.*

以内函数表述的特征并不解决关于移位的不变子空间的全部问题，但也确实解决了一些问题. 下面是一例.

系2. *如果 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 是在单侧移位下不变的非零子空间，则 $\mathbf{M}\cap\mathbf{N}\neq\{0\}$.*

系2说的是单侧移位的不变子空间格离开有补格还差得很远.

126. 循环矢量. A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的算子，如果 f, Af, A^2f, $\cdots$ 张成 $\mathbf{H}$, 则称 A 有*循环矢量* f. 等价地说，p 遍历所有多项式时，形如 $p(A)f$ 的矢量全体的集稠于 $\mathbf{H}$, 便说 f 是关于 A 的循环矢量. 简单单侧移位有许多循环矢量；e_0 便是一个平凡的

例.

在有限维空间上，存在着循环矢量就表征着有类似于重数1的某种性质. 精确地说，如果 A 是一个有限对角矩阵，则 A 有循环矢量当且只当对角元素两两互异(即特征值都是单重的). 的确，如果对角元素是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则对每一多项式 p 有 $p(A)\langle\xi_1, \cdots, \xi_n\rangle = \langle p(\lambda_1)\xi_1, \cdots, p(\lambda_n)\xi_n\rangle$. 为使 $f=\langle\xi_1, \cdots, \xi_n\rangle$ 是循环矢量，显然必须对每一 i 有 $\xi_i\neq 0$；否则，对一切 p, $p(A)f$ 的第 i 个坐标都是0. 如果诸 λ 不是两两互异的，就无法使 f 足以成为循环矢量. 譬如以 $\lambda_1=\lambda_2$ 为例，则 $\langle\xi_2^*, -\xi_1^*, 0, \cdots, 0\rangle$ 必对一切 p，正交于 $p(A)f$. 另一方面，如果诸 λ 是互异的，则 $p(\lambda_1), \cdots, p(\lambda_n)$ 可使取任意指定的值，因此如果诸 ξ 无一为0，则 $p(A)f$ 的值必穷尽整个空间.

即使对非对角矩阵说，也可以看到循环矢量的存在性与重数1间的关系的迹象. 例如，如果 A 是一个有限矩阵，则直接和 $A\oplus A$ 不能有循环矢量. 理由：根据 Hamilton-Cayley 方程，$1, A, A^2, \cdots$ 中至多只有 n 个是线性无关的（n 是 A 的阶数），因此不论 f 和 g 如何，矢量 $A^jf\oplus A^jg$ 中至多只有 n 个是线性无关的；由此得知它们不可能张成 $2n$ 维的空间.

如果 A 在任何意义下有重数1，我们有理由料想 A^* 也是如此；这引起这样的猜测：如果 A 有循环矢量，则 A^* 也有. 对有限矩阵说，这是真的. 为了证明此事，只须注意到如果一个矩阵有循环矢量，其复共轭矩阵必定也有，并记起每一个矩阵都相似于其转置矩阵.

前几段的方法十足地是有限维的；这启示我们，无穷维空间中循环矢量的理论很可能是顽固而难于处理的，而实际上它确是如此. 首先有一个关于基数的较平凡的难点. 如果存在一个循环矢量，则有一个会张成全空间的可数集，因此空间是可分的；换句话说，在不可分空间中不存在循环矢量. 这个困难可以绕避过去；这是正规算子的重数理论的成就之一(Halmos [1951, III]). 关于正规算子，重数1与循环矢量的存在性间的密切关联在无穷维空

间中，适当地重新解释之后甚至在不可数维空间中，仍能保持下来.

关于非正规算子，情况是奇特的. 直接和 $A\oplus A$ 可能有循环矢量，而且 A^* 没有循环矢量时，A 却可能有. 这些事实首先被 D. E. Sarason 注意到.

问题 126. 如果 U 是重数不超过 $\aleph_0$ 的单侧移位，则 U^* 有循环矢量.

简单单侧移位显然有循环矢量，但其伴随算子也有循环矢量则完全不是显然的. 它的确有，但这事实本身并不令人感到意外. 这个断语的第一个奇异的推论是，如果 U 表示简单单侧移位，则 $U^*\oplus U^*$（它是重数 2 的单侧移位的伴随算子）有循环矢量. 在 $U\oplus U$ 不能有循环矢量(尤其是，对于更多的加项的直接和，这也是真的)的评注之下，所指出的这个奇异性质完全暴露出来了. 为了证明上述否定断语，考虑把

$$\langle\langle\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\rangle,\ \langle\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\rangle\rangle$$

作为 $U\oplus U$ 的循环矢量的试选对象. 如果 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 是在通常的二维复内积空间中正交于 $\langle\xi_0,\ \eta_0\rangle$ 的任意非 0 矢量，则矢量

$$\langle\langle\alpha,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle,\ \langle\beta,\ 0,\ 0,\ \cdots\rangle\rangle$$

对一切 $n(=0,\ 1,\ 2\ \ \cdots)$，正交于

$$(U\oplus U)^n\langle\langle\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\rangle,\ \langle\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\rangle\rangle.$$

这就证明了循环矢量的试选对象失败了.

127. F. 和 M. Riesz 定理. 能看到当代(软的)数学的一部分深入到古老的问题中，阐明并简化了创业的祖先们在(硬的)分析学上的某些工作，一定是一种乐事；单侧移位的不变子空间的特征就做到这一点. $\mathbf{H}^2$ 的元素与单位圆域上某些解析函数有关联(问题 28)，虽然它们本身仅在单位圆上定义，而且仅是几乎处处有定义，但它们倾向于模仿解析函数的性质. 解析函数有一个关键的性质，就是它如果不是处处为零就不能太频繁地取零值. F. 和 M. Riesz 的一个重要的定理断言 $\mathbf{H}^2$ 的元素展示同类的性质；下面是一个可能的表达方式.

问题 127. $\mathbf{H}^2$ 中的函数或者几乎处处为零或者几乎处处不

为零.

系. 如果 f 和 g 都属于 $\mathbf{H}^2$ 且几乎处处有 $fg=0$, 则几乎处处有 $f=0$, 或者几乎处处有 $g=0$.

简洁地说: 在 $\mathbf{H}^2$ 中没有零除元.

关于 F. 和 M. Riesz 定理的更一般的讨论, 参看 Hoffman [1962, p. 47].

128. F. 和 M. Riesz 定理的推广. F. 和 M. Riesz 定理说的是, 如果 $f\in\mathbf{H}^2$ 且 f 在正测度集上为零. 则 $f=0$ 几乎处处成立. 所谓"$f\in\mathbf{H}^2$"就是说 f 的具有负指数的富里叶系数都是 0. 这蕴涵着如果 $f=\sum_n \alpha_n e_n$, 则对一切非零的 n 有 $\alpha_n\alpha_{-n}=0$. 这个条件是否足够保证 F. 和 M. Riesz 定理的结论成立?

问题 **128**. 如果 $f\in\mathbf{L}^2$ 具有富里叶展开式 $f=\sum_n \alpha_n e_n$, 对一切非零的 n 有 $\alpha_n\alpha_{-n}=0$, 且 f 在一个正测度上为 0, 可否推知 $f=0$ 几乎处处成立?

129. 可约加权移位. 关于加权移位, 双侧和单侧移位的约化和不变子空间的理论已知者不多. 可是有一个引人注意的事实值得一提; 它与两侧的加权移位的可约性有关. 它属于 R. L. Kelley.

问题 **129**. 如果 A 是一个双侧加权移位, 带严格正的权数 α_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 则 A 是可约的一个充分必要条件是序列 $\{\alpha_n\}$ 是周期的.

第十五章 紧 算 子

130. 混合连续性. 对应于希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的强(s)和弱(w)拓扑, 关于自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{H}$ 的变换的连续性, 存在着四种可能的解释: 它们就是记号$(s\to s)$, $(w\to w)$, $(s\to w)$和$(w\to s)$所启示的四种解释. 这样, 说 $A(s\to w)$连续即指每一 w-开集在 A 下的原象是 s-开的; 等价地说, 即指 s-收敛于 f 的网在 A 下的象是 w-收

敛于 Af 的网. 四种不同的连续性毕竟是太多了，不太好；幸运的是它们中间的三种归化成一种.

问题 130. 关于线性变换 A, $(s\to s)$, $(w\to w)$与$(s\to w)$这三种连续性是等价的(从而各等价于有界性). $(w\to s)$连续蕴涵 A 是有限秩的.

系. 在一个希耳伯特空间上的算子作用下，闭单位球的象恒是强闭的.

也许值得注意的是，对有限秩线性变换说，所有四种连续性是相互等价的；这是个不足道的有限维的断语.

131. 紧算子. 希耳伯特空间上的线性变换叫做紧的(也叫做全连续的)如果它在单位球上的限制是$(w\to s)$连续的(参看问题130). 等价地说，线性变换是紧的如果它把每一有界弱收敛网映射成强收敛网. 由于弱收敛序列都是有界的，得知紧线性变换把每一个弱收敛序列映射成强收敛序列.

闭单位球在紧线性变换下的象是强紧集(证：闭单位球是弱紧的). 这蕴涵每一有界集的象是准紧的(即有一个强紧闭包)(证：有界集必包含于某闭球). 逆蕴涵式也是真的：如果一个线性变换把有界集都映射成准紧集，则它也把闭单位球映射成一个紧集. 为了证明它，首先看到紧(和准紧)集都是有界的，而因此把有界集映射成准紧集的线性变换本身必须是有界的(这附带地蕴涵每一个紧线性变换是有界的). 从问题 130 的系得知闭单位球的象是强闭的；这一点，连同象是准紧的假定，蕴涵象就是紧的. (刚才证明的逆命题在巴拿哈空间中不是普遍地真的.)紧性条件在这里是当作上面用来定义紧线性变换的连续性条件的推论，事实上它们可以证明是等价于那些连续性条件而且它们也时常被用以定义紧线性变换. (参看 Dunford-Schwartz[1958, p. 484].)

紧算子的一个有时有用的性质是它们能"达到它们的范数". 准确地说：如果 A 是紧的，必存在一个单位矢量 f，使得$\|Af\|=\|A\|$. 理由如下：映射 $f\to Af$ 在单位球上$(w\to s)$连续而映射 $g\to\|g\|$强连续，由此得知 $f\to\|Af\|$在单位球上弱连续. 由于单

位球是弱紧的，这个函数达到其最大值，因此存在 f，$\|f\|\leqslant 1$，使得 $\|Af\|=\|A\|$. 如果 $A=0$，则可选择 f 使具有范数 1；如果 $A\neq 0$，则 f 必定有范数 1. 理由：由于 $f\neq 0$ 且 $\frac{1}{\|f\|}\geqslant 1$，得知

$$\|A\|\leqslant\frac{\|A\|}{\|f\|}=\frac{\|Af\|}{\|f\|}\leqslant\|A\|.$$

问题 131. 一个希耳伯特空间上的紧算子全体的集 $\mathbf{C}$ 是一个闭自共轭(Self-adjoint)(两侧)理想.

这里的"闭"指关于范数拓扑的. "自共轭"意指如果 $A\in\mathbf{C}$，则 $A^*\in\mathbf{C}$. 而"理想"意指 $\mathbf{C}$ 中算子的线性组合必在 $\mathbf{C}$ 中，且至少有一因子在 $\mathbf{C}$ 中的算子乘积也必在 $\mathbf{C}$ 中.

132. **对角紧算子**. 恒等算子是紧的吗？在有限维空间中，由于强与弱拓扑一致，答案是"对". 对无穷维空间说，答案是"否". 其理由是，单位球的象是单位球，而在无穷维空间中单位球不可能是强紧的(问题 10).

强与弱拓扑在有限维空间中的不可分辨性导致一大类的紧算子的例，即所有有限秩算子. 利用紧算子的集是闭的这一事实可以得到稍为复杂一些的结构的例子.

问题 132. 具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子是紧的当且只当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$.

系. 具有权数 $\{\alpha_n: n=0, 1, 2, \cdots\}$ 的加权移位是紧的当且只当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$.

133. **正规紧算子**. 容易看到如果一个正规算子的谱的每一非零元是孤立点(即不是谱的聚点)，则它是对角算子(对 A 的每一个非零特征值 λ，选定子空间 $\{f: Af=\lambda f\}$ 的一个就范正交基，所有这些小基的并，再加上 A 的核的基，就得到全空间的一个基). 如果还再假定每一非零特征值都具有有限重数，则该算子是紧的. (比较问题 132；注意在所假定的条件下，特征值的集必须是可数的.) 沿着这些思路的一些值得注意而且有用的事实是从相反方向考虑而得到的.

问题 133. 紧正规算子的谱是可数的，这个谱的一切非零元都是有限重的特征值.

系. 每一个紧正规算子是(在一个可能是从不存在到不可分之间的任何空间上的)算子 0 和一个(在可分空间上的)对角算子的直接和.

这个系可以用一个不那么细致刻划但却较简短的方式表达如下：每一个紧正规算子是对角算子.

134. 恒等算子的核. 矩阵具有有价值的"连续的"推广. 推广的思路是用积分代替和. 到某一程度为止，这是行得通的. 要发见这在什么地方会发生错误，试考虑具有测度 μ(如常，设是 σ-有限的)的测度空间 X，并且考虑乘积空间 $X\times X$ 上的可测函数 K. 我们可以设想作为广义的矩阵的就是象 K 这样的二元函数. 假设 A 是 $\mathbf{L}^2(\mu)$上的一个算子，它与 K 的关系类似于一个算子与其矩阵间通常的关系. 用精确的语言表达，这就是说如果 $f\in\mathbf{L}^2(\mu)$，则对几乎每一个 x，

$$(Af)(x)=\int K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

在这些条件下，A 叫做一个*积分算子*，而 K 叫做它的*核*.

在希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的研究中，说"选择一个就范正交基"其实不过是"选择把 $\mathbf{H}$ 表示成 $\mathbf{L}^2$ 的特殊方法"的一种特别说法. $\mathbf{L}^2$ 中有许多现象是序列空间中更习见现象的自然的"连续"推广. 关于序列空间有一个简单的事实就是它们上面的每一个算子有一个矩阵，不论所讨论的序列(族)是有限或无穷，这都是真的(逆步骤在无穷维的情形遇到障碍. 从算子到矩阵一切顺利；从矩阵到算子才存在麻烦). 有了这些迹象，我们有理由猜测 $\mathbf{L}^2$ 中每一算子有一个核，即每一算子是一个积分算子. 这个猜测是错误的，无可补救的错误. 困难不发生于不规矩的算子，也不发生于不规矩的测度；即使当算子是恒等算子而测度是(在直线上或在任何区间上的)勒贝格测度时已经有麻烦了.

问题 134. 如果 μ 是勒贝格测度，则恒等算子不是 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上

的积分算子.

135. Hilbert-Schmidt 算子. 一个核在什么条件下会诱导一个算子?由于这个问题包含了相应的关于矩阵的问题,寻找充要条件是不合理的. 一个相当特殊但却自然而且有用的充分条件是:核是平方可积的.

准确地说,假设 X 是一个具有 σ- 有限测度 μ 的测度空间,并设 K 是 $X\times X$ 上的复值可测函数,它使得 $|K|^2$ 关于乘积测度 $\mu\times\mu$ 是可积的,可以推知,对几乎每一个 x,函数 $y\to K(x,y)$ 属于 $\mathbf{L}^2(\mu)$,从而乘积函数 $y\to K(x,y)f(y)$,当 $f\in\mathbf{L}^2(\mu)$ 时都是可积的. 由于还有

$$\begin{aligned}&\int\left|\int K(x,y)f(y)d\mu(y)\right|^2 d\mu(x)\\&\leqslant\int\left(\int|K(x,y)|^2 d\mu(y)\cdot\int|f(y)|^2 d\mu(y)\right)d\mu(x)\\&=\|K\|^2\cdot\|f\|^2\end{aligned}$$

(这里 $\|K\|$ 是 K 在 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 中的范数),得知方程

$$(Af)(x)=\int K(x,y)f(y)\,d\mu(y)$$

在 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上定义了一个算子(具有核 K), 上面的不等式还蕴涵 $\|A\|\leqslant\|K\|$. 具有这类型的核(即属于 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 的核)的积分算子叫做 Hilbert-Schmidt 算子. Schatten [1960] 是关于它们的性质的好的参考文献.

对应 $K\to A$ 是从 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 到 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上的算子的一一线性映射. 如果 A 有核 K(属于 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$),则 A^* 有由

$$\widetilde{K}(x,y)=(K(y,x))^*$$

定义的核 $\widetilde{K}$. 如果 A 和 B 有核 H 和 K(属于 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$), 则 AB 有由

$$HK(x,y)=\int H(x,z)K(z,y)d\mu(z)$$

定义的核 HK. 所有这些代数的断语的证明都是简捷的积分计算.

在分析性质方面，情形是一样地令人惬意．如 $\{K_n\}$ 是属于 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 的核的序列，使得 $K_n\to K$（依 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 的范数），又对应的算子是 A_n（对于 K_n）和 A（对于 K），则 $\|A_n-A\|\to 0$．证明从积分算子范数与其核的范数间的不等式立即可得.

问题 135．*每一个 Hilbert-Schmidt 算子是紧的．*

这些考虑特别当空间是正整数集而具有计数测度时是适用的．由此得知如果一个矩阵的诸元素是平方可和的，则该矩阵是有界（意即它定义了一个算子）且紧的（考虑到问题 135 的断语）．必须加以评注的是，关于矩阵的有界性的 Schur 定则（问题 37）可以简捷地推广成为关于核的一个定理；参看 Brown-Halmos-Shields [1965].

136．紧算子与 Hilbert-Schmidt 算子．

问题 136．*每一个紧算子都是 Hilbert-Schmidt 算子吗？*

137．有限秩算子的极限． 迄今见到的每一个紧算子的例（对角算子，加权移位，积分算子）都是通过指明它是有限秩算子的极限而证明其紧性．这不是偶然的．

问题 137．*每一紧算子是有限秩算子（依范数）的极限．*

这个断语推广到任意巴拿哈空间去还未解决（见 283 页注）.

138．算子的理想． 算子的理想称为真的如果它不包含每一个算子．希耳伯特空间上的算子的理想的一个简易的例就是该空间上的有限秩算子全体的集；如果空间是无穷维的，这个理想便是真的．另一个例子是紧算子全体的集；如果空间是无穷维的，这个理想也是真的．第二个例子是闭的，在无限维空间，第一个例子不是闭的.

问题 138．*如果 $\mathbf{H}$ 是可分希耳伯特空间，则紧算子的集是 $\mathbf{H}$ 上的算子代数的仅有的非零闭真理想．*

类似的结果对不可分空间也成立，但表达方式和证明比较繁复且乏味.

139．紧算子的平方根． 容易构造其平方是紧算子的非紧算子；事实上，不难构造非紧的指数 2 的幂零算子（参看问题 80）．关

于正规的情形则如何?

问题 **139**. *是否存在其平方是紧算子的非紧正规算子?*

140. Fredholm 择一律. 关于紧算子(不管是否正规)的主要的谱性质是,非零的数只能通过点谱才能进入谱. 更精确地说:如果 C 是紧的,λ 是非零复数,则除非 λ 是 C 的特征值,$C-\lambda$ 必是可逆的. 除以 λ 即能表明只须研究 $\lambda=1$ 的情形. 上面的陈述便这样转化为下列陈述.

问题 **140**. *如果 C 是紧的且 $\ker(1-C)=\{0\}$,则 $1-C$ 是可逆的.*

这个陈述被征引时常称为 Freclholm 择一律. Fredholm 择一律有一种开玩笑似的但又不是太不准确的重新表述方式, 即方程 $(1-C)f=g$ 中, g 看做已知元而 f 作为未知元, 如果这方程的解是唯一的,则它一定存在.

系. *点谱是空集的紧算子必是拟幂零算子.*

141. 紧算子的值域.

问题 **141**. *包含在紧算子的值域中的每一(闭)子空间是有限维的.*

系. *紧算子的每一个特征值具有有限重数.*

142. Atkinson 的定理. 算子 A 叫做 Fredholm 算子, 如果(1) $\operatorname{ran}A$ 是闭的且 $\ker A$ 和 $(\operatorname{ran}A)^{\perp}$ 都是有限维的(最后两条件可以表达成 A 的零秩和余秩是有限的). 算子 A 以有限秩算子理想为模是可逆的,如果(2)存在算子 B 使得 $1-AB$ 和 $1-BA$ 都有有限的秩. 算子 A 以紧算子理想为模是可逆的, 如果(3)存在算子 B 使得 $1-AB$ 和 $1-BA$ 都是紧的.

问题 **142**. *算子 A 是(1) Fredholm 算子, 当且只当它 (2) 以有限秩算子理想为模是可逆的, 或另一种说法, 当且只当它(3)以紧算子理想为模是可逆的.*

这个结果属于 Atkinson [1951].

143. Weyl 的定理. 把紧算子加给一个已知算子,这样的步骤有时称为摄动. 对摄动的一般看法是,紧算子是"小"的,加上一

个紧算子不能(或不该)促成根本的变化.

问题 143. 如果两算子的差是紧算子，它们的谱除特征值外应该相同. 更明白地说：如果 $A-B$ 是紧的，又 $\lambda\in\Lambda(A)-\Pi_0(A)$，则 $\lambda\in\Lambda(B)$.

注意，对 $B=0$ 说，这个陈述可由问题 140 推得.

144. 摄动谱. 当把紧算子加给一个算子时，该算子的谱当然会发生变化，但在某种意义上说变化得不多. 特征值可能有些增减，但除此之外，谱保持不变. 在另一种意义上，谱却可能因为加上一个紧算子而受到深刻的影响.

问题 144. 存在一个酉算子 U，且存在一个紧算子 C，使得 $U+C$ 的谱是整个单位圆域.

145. 以紧算子为模的移位. Weyl 的定理(问题 143)蕴涵如果 U 是单侧移位而 C 是紧算子，则 $U+C$ 的谱包含单位圆域. (这里有点奇怪. $U+C$ 的谱包含单位圆域的理由是 U 没有特征值. U^* 有许多特征值，因此上述推理对它不适用，但结论却是适用的. 理由：将 $U+C^*$ 的谱关于实轴进行反射便得到 U^*+C 的谱，而 C^* 和 C 一样地是紧算子.) 还有更多的结论：Stampfli [1965] 证明，开单位圆域的每一点是 $(U+C)^*$ 的特征值.

从前段得知 $U+C$ 不可能是可逆的 (谱不能不含有 0)，也可推知 $U+C$ 不可能是拟幂零的(谱不能仅含一点 0). 扼要地说：如果可逆性和拟幂零性被视为良好的性质，则不仅 U 是坏的，而且加以摄动也不能使它改善. 一个算子所能具有的最好性质也许是正规性(而 U 却不具有)；在这一方面说，摄动能否使 U 有所改善？

问题 145. 如果 U 是单侧移位，是否存在着紧算子 C，使得 $U+C$ 是正规的？

Freeman [1965] 得到一个与这一范围的思想有关联的结果；他证明了，对一大类紧算子 C 说，摄动了的移位 $U+C$ 与未摄动移位 U 相似.

146. 有界 Volterra 核. 积分算子是广义的矩阵. 关于矩

阵的经验说明矩阵中有越多的零元素，对它们进行计算就越容易；特别地，三角矩阵常是十分易于驾驭的．哪一类积分算子是三角矩阵的恰当的推广？在寻求解答时，宜于只考虑十分特殊的测度空间．在下面的讨论中，X 仅限于是单位区间，μ 仅限于是勒贝格测度（这理论可以稍为一般地加以处理，参看 Ringrose[1962]）．

Volterra 核是 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 中的一个核 K，它使得当 $x<y$ 时有 $K(x, y)=0$．等价地说，Volterra 核是在下述意义下三角的 Hilbert-Schmidt 核，即在单位正方形对角线$(x=y)$的上方它取值 0．考虑到这个定义，由 Volterra 核 K 诱导的积分算子 A（Volterra 算子）的意义可以由方程

$$(Af)(x)=\int_0^x K(x, y)f(y)dy$$

来描述．

如果一个有限三角矩阵的对角项为 0，则该矩阵是幂零的．由于单位正方形的对角线有测度 0，又由于从希耳伯特空间的观点看来测度为 0 的子集是可以省略的，在对角线上为零的条件没有一个连续的类似物．虽然如此，可以看出一个 Volterra 核在对角线上方的零值战胜了在下方的非零值．

问题 **146**．具有有界核的 Volterra 算子是拟幂零的．

注意：这里的“有界”涉及的是核，而不是算子．所假定的是该核在单元正方形中是几乎处处有界的．

147．无界 Volterra 核． 在问题 146 中，有界的假定重要到什么程度？

问题 **147**．每一个 Volterra 算子都是拟幂零的吗？

148．Volterra 积分算子． 最简单的非平凡 Volterra 算子的核是三角形 $\{\langle x, y\rangle: 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$ 的特征函数．明显地表示出来，该算子就是依

$$(Vf)(x)=\int_0^x f(y)dy$$

定义于 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 上的 Volterra 算子 V．再换句话说，V 就是求不

定积分，其积分常数调整至使 V 的值域中每一个函数都在 $x=0$ 取值 0（注意 V 的值域中的每一个函数都是连续函数．更好的说法：V 的值域中的每一个矢量，视为以 0 测度的集为模的一个函数等价类，含有唯一的连续函数）．

由于 V^* 是以 V 的核的"共轭转置"为核的积分算子，因此 V^* 的核就是三角形 $\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$ 的特征函数，由此得知 $V+V^*$ 是一个积分算子，其核几乎处处等于常数函数 1（算子 V^* 和 $V+V^*$ 当然不是 Volterra 算子）．这是一个十分简单的积分算子；稍加分析就能证明它是一个投影算子，其值域是常数函数所构成的（一维）空间．由此得知 $\operatorname{Re} V$ 具有秩 1；由于 $V=\operatorname{Re} V+i\operatorname{Im} V$，得知 V 是一个斜自伴算子的摄动（在这里是加上一个一秩算子）．

一般的 Hilbert-Schmidt 算子理论加上特别的 Volterra 算子理论解答了关于 V 的许多问题．例如，V 是紧的（因为它是一个 Hilbert-Schmidt 算子），而且它是拟幂零的（因为它是 Volterra 算子）．还有许多关于 V 的自然的问题；有些易于解答，有些则否．这就是一个容易的问题：V 能否使某一非零矢量变成 0（可以等价地问："V 有一个非平凡核吗"？但这种提法存在术语上的混乱）？答案是"否"．如果对几乎每一个 x 有 $\int_0^x f(y)dy=0$，则据连续性，该方程对每一个 x 成立．由于在 V 的值域中的函数不仅是连续的，事实上还几乎处处是可微的，该方程可以两边求导；结果是对几乎每一个 x，有 $f(x)=0$．还有不那么容易处理的自然问题，下面是一个简单的样例．

问题 **148**．V 的范数等于什么数？

149．斜对称 Volterra 算子． 有一个 $\mathbf{L}^2(-1, +1)$（勒贝格测度）上的算子 V_0 与 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 上的算子 V 有微弱的形式上的类似；按定义

$$(V_0 f)(x)=\int_{-x}^{x} f(y)dy.$$

注意 V_0 是以蝴蝶形 $\{\langle x, y\rangle: 0\leqslant|y|\leqslant|x|\leqslant 1\}$ 的特征函数为核的积分算子．

问题 149. *求斜对称 Volterra 算子 V_0 的谱与范数.*

150. 范数 1, 谱 {1}. 每一有限矩阵酉等价于一个三角矩阵. 如果一个三角矩阵在主对角线上的元素只能是1,则其范数至少为1; 仅在矩阵是单位矩阵的情形范数才能等于1. 结论是, 在有限维希耳伯特空间上恒等映射是仅有的具有谱 {1} 的压缩算子. 引导到这个结论的推理是十足有限维的; 可否加以修补使能得到关于无限维空间的同一结论?

问题 150. *除 1 以外, 是否存在算子 A 使得 $\Lambda(A)=\{1\}$, 而 $\|A\|=1$?*

151. Donoghue 格. 算子理论中最重要、最困难也最令人烦恼的未解决问题之一就是不变子空间问题. 问题很容易叙述: 无穷维希耳伯特空间上的每一个算子都有非平凡不变子空间吗?"非平凡"指不同于 {0}, 也不同于全空间; "不变"指该算子把该空间映射到它本身中. 对有限维空间说, 这当然不成问题. 只要用的是复数域,代数基本定理蕴涵特征矢量的存在性.

Polya 有一个名言说,每一个未解答的问题都各存在一个较容易的未解答的问题, 学者的第一个任务是去寻找后者. 即使应用这个格言,在这里也有困难;不变子空间问题的许多减弱了的问题要么是平凡不足道的,要么和原来那没有减弱的问题同样困难. 例如, 如果为了企图得到一个肯定结果, 用"线性流形"(不一定闭的) 取代"子空间", 则答案是"对",而且很容易 (参看 Schaefer [1963], 那里有一个漂亮的讨论). 如果, 在另一方面, 为了企图得到一个反例, 用"巴拿哈空间"取代"希耳伯特空间", 也毫无所获; 谁都不曾成功地在任何空间中找到一个反例.

对于某些特殊种类的算子, 已经得到一些肯定的结果. 取得这样的结果的最省力的尝试是引用谱定理而得到正规算子恒有非平凡不变子空间的结论. 循着这些方向的最早期的非不足道的结果是紧算子恒有非平凡不变子空间(Aronszajn-Smith [1954]). 这个结果已经得到推广 (Bernstein-Robinson [1966], Halmos [1966]), 但推广了的定理仍与紧性密切联系着. 非紧的结果很少;

这里有一个样例．如果 A 是一个压缩算子，它使得序列 $\{A^n\}$ 和 $\{A^{*n}\}$ 都不强收敛于 0，则 A 有一个非平凡不变子空间 (Nagy-Foias, [1964])．Helson [1964] 提供一个关于这个课题的比较近期的鸟瞰，在 Dunford-Schwartz [1963] 中有更广泛的参考书目．

从另一个方向来探讨这个课题是有助益的：不去寻找反例，而去研究某些非反例的结构．这样做的一条途径是把注意力集中在一个特殊的算子而去刻划它的所有的不变子空间；这方向的第一个有效的步骤是 Beurling 的工作 [1949]（问题 125)．

沿着这个方向的工作都不是容易的．第二个其不变子空间已经得到详尽研究的算子是 Volterra 积分算子 (Brodskii [1957], Donoghue [1957 b], Kalisch [1957], Sakhnovich [1957])．关于它的结果比起关于移位的结果较易于描述，但更难证明．如果对 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 中的 f 有 $(Vf)(x)=\int_0^x f(y)dy$，又对 $[0, 1]$ 中的每一 α，$\mathbf{M}_\alpha$ 是在 $[0, \alpha]$ 上几乎处处为零的那些函数所成的子空间，则 $\mathbf{M}_\alpha$ 在 V 下不变；主要的结果是 V 的每一个不变子空间都是诸 $\mathbf{M}_\alpha$ 中之一．得到这些结果的一个漂亮方法是把 Volterra 积分算子的研究（就不变子空间而论）约化成单侧移位的研究；Sarason [1965] 就是这样做的．

在某一特殊算子下不变的所有子空间的类是一个格（关于构成交集和构成张成空间的运算封闭)．描述关于 V 的结果的一个方法是指出它的不变子空间与闭单位区间反同构（“反”，因为当 α 增大时 $\mathbf{M}_\alpha$ 反而缩小)．V^* 的不变子空间格在一个显然的方式下与闭单位区间同构．

是否存在一个算子其不变子空间格同构于正整数全体？这个问题的提法应该稍为谨慎一些．注意每一个不变子空间格都有一个最大元．准确的提法是容易的：是否有这样一个算子，在正整数和 ∞ 的集与该算子的所有不变子空间之间存在一个一对一且保序的映射 $n\to\mathbf{M}_n$, $n=0, 1, 2, 3, \cdots, \infty$？答案是“对”．第一个这样的算子为 Donoghue [1957. b] 所发见，Nikolskii [1965] 描述

了一个更广的这样的算子类.

假设 $\{\alpha_n\}$ 是正数($\alpha_n>0$)的单调序列 ($\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \cdots$), 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$. 具有权数序列 $\{\alpha_n\}$ 的单侧加权移位叫做单调 l^2 移位. 基矢量 $e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots$ 的张成空间在这样的移位下不变, $n=0, 1, 2, \cdots$. 其正交补, 即 $e_0, \cdots, e_{n-1}$ 的张成空间 $\mathbf{M}_n$, 在伴随算子下不变, $n=1, 2, 3, \cdots$; 主要的结果是, 该伴随算子的每一个不变子空间必是这些正交补中之一.

问题 151. 如果 A 是单调 l^2 移位的伴随算子, 又 $\mathbf{M}$ 是在 A 下不变的非平凡不变子空间, 则必存在一个整数 n($=1$, 或 2, 或 3, $\cdots$) 使得 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_n$.

第十六章 次正规算子

152. Putnam-Fuglede 定理. 有些关于正规算子的自然的问题对于有限维空间和无穷维空间有相同的答案而且用以证明这些答案的技巧也是相同的. 另一方面, 有些问题是地地道道无穷维的, 这就是说, 对于有限维空间说, 它们或则是无意义的, 或则是平凡不足道的. 关于移位的问题, 或更一般地, 关于次正规算子的问题多半是属于这个范畴(参看问题 154). 在这两极端之间还有这样的问题, 当维数改变时它们的解答不变, 但(证明的)技巧则不然. 有时, 的确须将问题或解答重新叙述借以取得有限维与无穷维间的协调一致. 论及技巧, 经验说明无穷维的证明通常适用于有限维的情形; 所谓技巧不同意指自然的有限维的技巧不能推广到无穷维空间. 可是应该补充说明一点: 有时有限与无穷的证明有着内在的差别, 以致任一种不能用以导出另一种的结果; 一个适当的例子是下面这个命题: 任意两基有相同的基数. 有这样的定理, 其陈述易于从有限推广到无穷, 但其证明则否, 一个熟悉且典型的例子就是谱定理. 一个更令人注意的例子是 Fuglede 可交换性定理. 其所以更令人注意, 因为在以前, 它曾经是多年没有

解决的问题．对于有限维空间说，该陈述已知是真的且平凡不足道的；对于无穷维空间说，以前它是未知的．

Fuglede 定理(参看解 115)可以用几种方式表述．代数上最简单的表述方式是，如果 A 是正规算子而 B 是与 A 可交换的算子，则 B 也与 A^* 可交换．等价地说：如果 A^* 与 A 可交换而 A 与 B 可交换，则 A^* 与 B 可交换．后一方式中的断语就是说在某种特殊情况下可交换性是传递的(一般情况下不是这样)．

算子 A 在 Fuglede 定理中担任着双重角色；把 A 的两个角色分派给两个正规算子，这样修改了的断语是真的而且是有用的．这里有一个准确的表达方式．

问题 152．*如果 A_1 和 A_2 是正规算子，又 B 是一个使得 $A_1B=BA_2$ 的算子，则 $A_1^*B=BA_2^*$．*

试观察，当 B 是自伴时(即使 A 不一定是正规的)，Fuglede 定理是平凡不足道的，只须对假定成立的方程 $AB=BA$ 取伴随算子即得．Putnam 的推广(即问题 152)即使 B 是自伴时也不是显然的；此时 $A_1B=BA_2$ 的伴随是 $BA_1^*=A_2^*B$，而这不是我们所需要的．

系．*如果两个正规算子相似，则它们必酉等价．*

两个可交换的正规算子的积是否必正规？解答是"对"；这在各种维数的空间有相同的证明，该证明似乎必须用到 Fuglede 定理．与此有关联，必须指出，不一定可交换的正规算子的积要保证它成为正规是很勉强的．Wiegmann[1948]得到一个正面的有关结果；它说的是，如果 $\mathbf{H}$ 是一个有限维希耳伯特空间，又 A 和 B 是 $\mathbf{H}$ 上使 AB 正规的正规算子，则 BA 也是正规的．离开了有限维空间，即使这个结果也成为顽固难攻的．对于紧算子，该命题(在无穷维空间)仍是真的(Wiegmann[1949])．但在一般情形下它是错误的(Kaplansky[1953])．

153．**单位圆域的谱测度**．有一个可以用来证明 Fuglede 定理的技巧，这就是利用希耳伯特空间的几何学来刻划伴随着一个正规算子的谱子空间．这个技巧在其它问题上也是有用的．

复数有小或等于1的模的一个充要条件是它的一切幂都具有这个性质. 这个不足道的观察可以推广到复值函数: $\{x: |\varphi(x)| \leqslant 1\} = \{x: |\varphi(x)|^n \leqslant 1, n=1, 2, 3\cdots\}$. 复值函数与正规算子之间有着紧密的联系. 上述数值上的考察在算子上该有如下的类推: 如果 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的一个正规算子, 则 $\mathbf{H}$ 中使得 $\|A^n f\| \leqslant \|f\|$. $n=1, 2, 3, \cdots$ 的矢量全体的集 E, 该是 $\mathbf{H}$ 的这样的一个部分, 在这部分上, 在某种意义下, A 在1之下. 这是真的; 准确的表达方式是, E 是 $\mathbf{H}$ 的一个子空间而在 E 上的投影是伴随着 A 的谱测度在复平面的闭单位圆域上的值. 利用乘法算子的语言, 同一结果可以用较初等的形式表达出来.

问题 153. 如果 A 是一个测度空间上的有界可测函数 φ 诱导出的乘法算子, 又 $D=\{z: |z| \leqslant 1\}$, 则 $\mathbf{L}^2$ 中的元素 f 具有性质 $\chi_{\varphi^{-1}(D)} f = f$ 的一个充要条件是对每一正整数 n 有 $\|A^n f\| \leqslant \|f\|$.

如同通常那样, 这里的 χ 表示其下标所指的点集的特征函数.

通过平移与尺度改变, 伴随着一切圆域的谱子空间都可以类似地给予刻划; 特别地, 在乘以 $\{x: |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 的特征函数的乘法下不变的充要条件是对一切 n 有 $\|A^n f\| \leqslant \varepsilon^n \|f\|$. 这个结果有时有很好的应用, 其一例如下: 如果对某一正数 ε, 在 $\mathbf{L}^2$ 中(除0外)没有一个 f 使得 $\|A^n f\| \leqslant \varepsilon^n \|f\|$ 对一切 n 成立, 则在集 $\{x: |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon\}$ 的余集上取值0的诸 f 所形成的子空间就是 $\{0\}$, 所以 $\{x: |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon\}$ (几乎) 是空集. 结论: 在这些条件下, 几乎处处有 $|\varphi(x)| > \varepsilon$, 从而算子 A 可逆.

154. 次正规算子. 正规算子的理论相当成功, 非正规算子的理论多以之为模型建立起来, 推广成功的理论的一个自然的方法就是轻微地减弱它的假设条件并且希望相应的结论也仅有轻微的减弱. 正规性的一种减弱形式是拟正规性(参看问题108). 次正规算子构成一种更有用而且更深刻的沿着一个全然不同的方向的推广. 一个算子称为*次正规的*, 如果它有一个正规的扩张. 更精确地说, A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的算子, 如果存在希耳伯特空间

$\mathbf{K}$ 上的正规算子 B 使得 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{K}$ 的子空间，子空间 $\mathbf{H}$ 在算子 B 下不变，B 在 $\mathbf{H}$ 上的限制与 A 重合，则 A 称为次正规的．每一个正规算子显而易见地是次正规的．在有限维空间上每一个次正规算子是正规的，但这需要一些证明，参看解 159 或问题 160．次正规算子的一个更有趣，更典型的例子是单侧移位；双侧移位是它的正规扩张．

问题 **154**．每一个拟正规算子是次正规的．

正规性蕴涵拟正规性，但逆命题不成立(有单侧移位为证)．现在这个断语则说明拟正规性蕴涵次正规性，但逆命题也不成立．把一个非 0 倍乘算子加于单侧移位便得到一个反例．所得算子，正如单侧移位，是一个次正规算子，但是通过直捷的计算便能证明，如果它又是拟正规的，则单侧移位将是正规的了．

155．极小正规扩张．($\mathbf{H}$ 上)次正规算子 A(在 $\mathbf{K}$ 上)的正规扩张 B 称为极小的，如果在 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{K}$ 之间不存在 B 的约化子空间．换句话说，如果每当 $\mathbf{M}$ 约化 B 且 $\mathbf{H}\subset\mathbf{M}$ 时，可推知 $\mathbf{M}=\mathbf{K}$，便说 B 在 A 上极小．对于极小正规扩张要用什么冠词才恰当："一个"还是"那个"？

问题 **155**．如果(在 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 上的)B_1 和 B_2 都是 $\mathbf{H}$ 上的次正规算子 A 的极小正规扩张，则存在一个 $\mathbf{K}_1$ 到 $\mathbf{K}_2$ 上的等距变换 U，它把 B_1 变成 B_2(即 $UB_1=B_2U$)且在 $\mathbf{H}$ 上它等于恒等算子．

考虑到这个结果，说一个次正规算子的"那个"极小正规扩张是合理的．事实上大家都这样称呼了．典型例子：单侧移位的那个极小正规扩张是双侧移位．

156．次正规算子的相似性．对于正规算子说，相似性蕴涵酉等价性(问题 152)．次正规算子是为了模仿正规算子的性质而设计的．这个性质是否模仿取得成功的一方面？

问题 **156**．两个相似的次正规算子必须是酉等价的吗？

157．谱包含定理．如果算子 A 是算子 B 在 B 的不变子空间 $\mathbf{H}$ 上的限制，又如果 f 是 A 的一个特征矢(即 $f\in\mathbf{H}$ 且对某

一数量 λ 有: $Af=\lambda f$), 则 f 是 B 的一个特征矢. 用不同的话来表示: 如果 $A\subset B$, 则 $\Pi_0(A)\subset\Pi_0(B)$, 或, 当一个算子扩大时, 其点谱也随着扩大了. 同样容易的验证指明, 当一个算子扩大时, 它的近似点谱也扩大. 这些很自然的考察吸引我们做这样的猜测: 当一个算子扩大时, 它的谱也扩大了, 所以特别有, 如果 A 是次正规的而 B 是它的极小正规扩张, 则 $\Lambda(A)\subset\Lambda(B)$. 次正规算子的第一个非平凡的例子证明了这个猜测是错误的: 如果 A 是单侧移位而 B 是双侧移位, 则 $\Lambda(A)$ 是单位圆域, 反之, $\Lambda(B)$ 仅是这个圆域的周界. 可以看出这个反例比起那以准确或近似的特征值为基础的似是而非的论证更好地解释了一般情况.

问题 157. 如果 A 是次正规算子而 B 是它的极小正规扩张, 则 $\Lambda(B)\subset\Lambda(A)$.

参考文献: Halmos[1952a].

158. **填洞**. 次正规算子的谱包含定理 (问题 157) 可以有趣地、令人诧异地加以改进使更深刻. 结果是, 次正规算子的谱恒可通过"填满"它的极小正规扩张的谱的"某些空洞"而得到. 这个非正式的表述可给以精确的技巧性的意义. 复平面的紧子集的一个洞指它的余集的一个有界分支.

问题 158. 如果 A 是次正规算子, B 是它的极小正规扩张, 又 Δ 是 $\Lambda(B)$ 的一个洞, 则 Δ 不是包含于 $\Lambda(A)$ 就是与 $\Lambda(A)$ 不相交.

159. **具有有限余维数的扩张.**

问题 159. 希耳伯特空间 $\mathbf{K}\supset\mathbf{H}$, 当 $\dim(\mathbf{K}\cap\mathbf{H}^{\perp})$ 有限时, $\mathbf{H}$ 上的次正规但非正规的算子能否有一个到 $\mathbf{K}$ 上的正规扩张?

160. **亚正规算子.** 如果 ($\mathbf{H}$ 上的) A 是次正规的, 具有 (到 $\mathbf{K}$ 上的) 正规扩张 B, A^* 与 B^* 间有什么关系? 利用从 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 上的投影 P 可以最好地表达这问题的答案. 如果 f 和 g 属于 $\mathbf{H}$, 则

$$\begin{aligned}(A^*f, g) &= (f, Ag) = (f, Bg) = (B^*f, g)\\ &= (B^*f, Pg) = (PB^*f, g).\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{K}$ 上的算子 PB^* 保持 $\mathbf{H}$ 不变，它在 $\mathbf{H}$ 上的限制是 $\mathbf{H}$ 上的一个算子，而根据上述的方程链，该限制就等于 A^*. 这样就得到答案：对 $\mathbf{H}$ 上的每一个 f，有 $A^*f=PB^*f$.

A^* 与 B^* 间的这个关系有一个奇特的推论. 如果 $f\in\mathbf{H}$，则

$$\|A^*f\|=\|PB^*f\|\leqslant\|B^*f\|(\text{据正规性})=\|Bf\|=\|Af\|.$$

这个结果($\|A^*f\|\leqslant\|Af\|$)可以用另外一个有用的方法来重新表述，即它等价于算子不等式

$$AA^*\leqslant A^*A.$$

的确：$\|A^*f\|^2=(AA^*f,f)$ 而 $\|Af\|^2=(A^*Af,f)$.

次正规算子恒能适合的这个奇特的不等式也可以通过一个富于启发性的矩阵计算而得到. 对应于分解式 $\mathbf{K}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}^\perp$，$\mathbf{K}$ 上的每一个算子可以表示成一个算子矩阵，对于特例 B 说，这也是真的. A 与 B 间的关系($A\subset B$)容易用 B 的矩阵表示出来；它(这个关系)成立的充要条件是：(1)主(西北角的)元素是 A，且(2)在它下面(西南角的)元素是 0. 条件(2)说明 $\mathbf{H}$ 在 B 下不变，而(1)说明 B 在 $\mathbf{H}$ 上的限制是 A. 于是

$$B=\begin{pmatrix}A & R\\ 0 & S\end{pmatrix},$$

因此

$$B^*=\begin{pmatrix}A^* & 0\\ R^* & S^*\end{pmatrix}.$$

由于 B 是正规的，得知矩阵

$$B^*B-BB^*=\begin{pmatrix}A^*A & A^*R\\ R^*A & R^*R+S^*S\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}AA^*+RR^* & RS^*\\ SR^* & SS^*\end{pmatrix}$$

必须等于 0. 这蕴涵 $A^*A-AA^*=RR^*$，从而 $A^*A-AA^*\geqslant 0$.

这里有一个奇特的不对称：为什么 A^*A 的作用与 AA^* 明显地不同？就单侧移位稍作思考是有益的. 如果 $A=$单侧移位 U，则 A 是次正规的，且 $A^*A=1$；反过来，AA^* 是一个非平凡的投影，显然有 $A^*A\geqslant AA^*$. 如果 $A=U^*$，则 A 不是次正规的(理由：假设它是次正规的，它将适合不等式 $A^*A\geqslant AA^*$，即 $UU^*\geqslant U^*U$，而 U 将是正规的.)如果认为对称是绝对不可缺的，则引入共轭次正规

性这个对偶概念(拟定义为：伴随算子是次正规的)，对称性就能恢复其普遍存在．如果 A 在这个意义下是共轭次正规的，则 $AA^*\geqslant A^*A$．使得 $A^*A\geqslant AA^*$ 的算子 A 已经被称为亚正规的(与之对偶的那一类算子不妨称为共轭亚正规的．注意希腊文中的"hypo"(亚)与拉丁文中的"Sub"(次)同义．这个命名并没有特殊的启示性，但这概念出现时这样取名，现在似乎就这样固定下来了)．前段的结果就是说，每一个次正规算子是亚正规的．对偶结果是平淡乏味的，它自然是，每一个共轭次正规算子是共轭亚正规的．

在有限维空间上，每一个亚正规算子是正规的，这个断语的最有效的证明是如下的一种迹推理．由于 $\mathrm{tr}(AB)$ 恒等于 $\mathrm{tr}(BA)$，得知 $\mathrm{tr}(A^*A-AA^*)$ 恒为 0；如果 $A^*A\geqslant AA^*$，则 A^*A-AA^* 是一个具有迹 0 的正算子，所以 $A^*A-AA^*=0$．这里所证明的结论是另一陈述的推广，该陈述就是，在有限维空间上，每一个次正规算子是正规的(参看问题 154)．

问题 160．给出一个亚正规但非次正规的算子的例．

这不是易解的问题．所用的技巧几乎足以得出次正规性的一个内在的特征，该特征曾被 Halmos[1950a] 得到而 Bram[1955] 予以改进，使更深刻．"内在"的意义指该特征可以用该算子在其定义域中诸矢量上的作用来表示，而不需要用到在其定义域以外的某些事物．该特征在以下意义下具有"有限性质"，即，它依赖于该算子在一切可能的矢量的有限集上的性态．通过更多的同类的工作可以得到次正规性的一个漂亮的拓扑特征；Bishop[1957] 首先这样做了．Bishop 的结果倒容易叙述：次正规算子全体的集正好是正规算子全体的集的强闭包．

161．正规和次正规的部分等距算子．

问题 161．部分等距算子是正规的当且只当它是一个酉算子和一个零算子的直接和；它是次正规的当且只当它是一个等距算子和一个零算子的直接和．

在这两种情形下，所说两直和加项中都可能缺少一项．

162．范数的幂和幂的范数． 使得对每一正整数 n 有 $\|A^n\|=$

$\|A\|^n$ 的那些算子 A 的集 $\mathbf{T}$ 至少有某些满足好奇心的价值. 如果 $A\in\mathbf{T}$, 则 $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=\|A\|$, 所以 $r(A)=\|A\|$; 如果反过来, 设 $r(A)=\|A\|$, 则 $\|A^n\|\leqslant\|A\|^n=(r(A))^n=r(A^n)\leqslant\|A^n\|$, 因此等号在全式中成立. 结论: $A\in\mathbf{T}$ 当且只当 $r(A)=\|A\|$.

$\mathbf{T}$ 的定义蕴涵每一个正规算子属于 $\mathbf{T}$(前段的结论也蕴涵这个结果). 对于 2×2 矩阵说, 通过一个繁冗的计算可以证明一个强的逆定理: 如果 $\|A^2\|=\|A\|^2$, 则 A 是正规的. 因为这个断语以及其证明都没有任何重要性, 因此略去其证明. 当维数超过 2, 逆命题就不成立. 例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

则对一切 n 有 $\|A^n\|=1$, 但是 A 肯定不是正规的.

正断语(如果 A 正规, 则 $A\in\mathbf{T}$)的最快的(但不一定是最初等的)证明是引用谱定理的. 由于对次正规和亚正规算子说, 该定理不能适用, 一个很自然的问题还没有解答. 其答案最终证明是肯定的.

问题 162. 如果 A 是亚正规的, 则对每一正整数 n, 有 $\|A^n\|=\|A\|^n$.

系. 亚正规拟幂零算子只能是 0.

163. 紧亚正规算子. 由有限维空间上亚正规算子的讨论(问题 160)得知(在一个可能是无限维空间上的)有限秩亚正规算子必然是正规算子. 有限秩算子的极限则如何?

问题 163. 每一个紧亚正规算子是正规的.

参考文献: Andô[1963], Berberian[1962], Stampfli[1962].

164. 亚正规算子的幂. 正规算子的每一个幂是正规算子. 这个显易不足道的考察有一个几乎同样不足道的推论, 就是次正规算子的每一个幂是次正规算子. 对亚正规算子说, 情况有所不同.

问题 164. 给出亚正规算子的平方不是亚正规算子的一个

例子.

这问题不很容易. 事实上，它必然地最少与构造一个非次正规的亚正规算子(问题160)同样困难，因为问题164的每一个解自动地是问题160的解. 反过来说则不成立；解160中所用的亚正规算子的一切幂也都是亚正规的.

165. 相似于酉算子的压缩算子.

问题165. 相似于酉算子的压缩算子必须是酉算子吗？

第十七章　数 值 值 域

166. Toeplitz-Hausdorff 定理 (Hilbert, Hellinger, Toeplitz 及其他人的)希耳伯特空间的早期研究中，主要有兴趣的对象是二次型. 现在它们已降为次要的角色. 首先涌现出希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的算子 A，然后，显然是在经过继续研究之后，出现 $\mathbf{H}$ 上的数值函数 $f \to (Af, f)$. 这并不是说二次(型)观点已经过时；它仍旧在提出问题，这些问题是有趣的，其解答也可能是有用的.

大多数关于算子的二次(型)的问题是关于它的数值值域(有时称为它的值的范围)的问题. 算子 A 的数值值域就是当 f 取遍单位球面上的一切矢量时等于 (Af, f) 的复数全体的集 $W(A)$ (重要点：$\|f\|=1$，非 $\|f\|\leqslant 1$). A 的数值值域就是伴随着 A 的二次型在单位球面上的限制的值域. 着重讨论单位球面的象的一个理由就是单位球(体)的象以及全部值域都容易通过它来描述，但反过来则不然. (单位球(体)的象是把原点与数值值域的点联结起来的一切闭线段的并；全部值域是以原点为顶点经过数值值域的点的一切闭射线的并).

算子的数值值域的确定有时很容易，这里有一些可作样例的结果. 如果

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $W(A)$ 是闭单位区间(容易); 如果

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},$$

则 $W(A)$ 是圆心在 0, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭圆域(容易, 但更有趣); 如果

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},$$

则 $W(A)$ 是焦点在 0 和 1, 短轴 1 且长轴 $\sqrt{2}$ 的闭椭圆域 (最多只应用解析几何). 有一个包括上述各种情况的定理. 如果 A 是 2×2 矩阵, 它具有不相等特征值 α 和 β, 对应着特征矢 f 和 g, f, g 已经规范化, 使 $\|f\|=\|g\|=1$, 则 $W(A)$ 是焦点在 α 和 β 的闭椭圆域; 如果 $\gamma=|(f, g)|$ 而 $\delta=\sqrt{1-\gamma^2}$, 则短轴是 $\gamma|\alpha-\beta|/\delta$ 而长轴是 $|\alpha-\beta|/\delta$. 如果 A 仅有一个特征值 α, 则 $W(A)$ 是圆心在 α 而半径为 $\frac{1}{2}\|A-\alpha\|$ 的(圆)域.

一对三维的例子可以说明: 二维的情形不能作为典型. 如果

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

其中 λ 是模 1 的复数, 则 $W(A)$ 是以 λ 的三个立方根为顶点的等边三角形(的内部和边界)(参看问题 171). 如果

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $W(A)$ 是把点 1 联结到圆心在 0 以 $\frac{1}{2}$ 为半径的闭圆域的点的一切闭线段的并(参看问题 171).

维数越高, 数值值域将越奇特. 如果 A 是 Volterra 积分算子(参看问题 148), 则 $W(A)$ 是位于曲线

$$t \to \frac{1-\cos t}{t^2} \pm i\frac{t-\sin t}{t^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

(取函数在 $t=0$ 的右极限为函数在 $t=0$ 的值)之间的点的集.

下列断语描述了所有这些例子的最重要的共同性质.

问题 166. 算子的数值值域恒是凸集.

这个定理以 Toeplitz–Hausdorff 定理闻名. 已知的每一个证明都是通过计算. 有的计算设计得好些,有的差一些,但不管怎样设计,它们反正都是计算. 我们更(或特别地)期望有一个概念性的证明,即使它所用的概念不如在计算的证明中所用的概念那么初等.

在这里宜于再作一些评论. 关于实部和虚部的考虑表明 Toeplitz–Hausdorff 定理是下述一般断语(当 $n=2$ 时)的特例:如果 $A_1, \cdots, A_n$ 是自伴算子,则形如 $\langle (A_1 f, f), \cdots, (A_n f, f)\rangle$ 的 n-数组,其中的 $\|f\|=1$,是 n 维实欧几里得空间的一个凸子集. 不管它是真的还是谬误的,该断语似乎是 Toeplitz–Hausdorff 定理的一个自然的推广;遗憾的是,它竟是十足地谬误的. 在二维空间中当 $n=3$ 时它就是谬误的,反例容易得到.

关于这个课题的第一篇论文是 Toeplitz[1918]的,他证明了 $W(A)$ 的边界是一个凸曲线,但没有解决它有没有可能在内部有洞. Hausdorff[1919]证明了没有这种可能性. Donoghue[1957a]重新检查这些事实并且给出某些有关联的计算. 关于 Volterra 积分算子的结果属于 A. Brown.

167. 高维数值值域. 数值值域可以看作一个多维的概念的一维特例. 要看出这是怎么说的,请记起一秩投影 P,用它的值域中的一个单位矢 f 表示的式子:对一切 g,

$$Pg = (g, f)f.$$

如果 A 是随意的一个算子,则 PAP 是一个 1 秩算子,所以对它说,类如迹的有限维概念是有意义的. PAP 的迹可以这样计算,即求 PAP 在 P 的值域上的限制关于(一个元素的)基 $\{f\}$ 的(一乘一)矩阵;由于 $Pf=f$,该迹的值是

$$(PAPf, f)=(APf, Pf)=(Af, f).$$

这些评注可以概括如下：$W(A)$等于当 P 取遍一切1秩投影时形如 $\operatorname{tr}PAP$ 的复数全体的集. 以一个任意正整数 k 代替 1,就得到 A 的 k-数值值域, 用记号表示为 $W_k(A)$：它是当 P 取遍一切 k 秩投影时形如 $\operatorname{tr}PAP$ 的复数全体的集. 通常的数值值域就是 $k=1$ 时的 k-数值值域.

问题 167. 算子的 k-数值值域恒是凸集吗?

168. 数值值域的闭包.

问题 168. 给出其数值值域非闭的算子的例.

注意到在有限维的情形下算子的数值是一个紧集的连续象,从而必须是紧的.

169. 谱与数值值域.

问题 169. 数值值域的闭包包含谱.

有一个不足道的推论, 它断言如果 $A=B+iC$, 其中 B 和 C 是自伴算子, 则 $\Lambda(A)\subset\overline{W(B)}+i\overline{W(C)}$. 这叫做 Bendixson-Hirsch 定理.

170. 拟幂零性与数值值域. 如果 A 是一个拟幂零算子,则,据问题 169, $0\in\overline{W(A)}$. 据解 168,集 $W(A)$可能不是闭的,因此从 $0\in\overline{W(A)}$ 不能推得 $0\in W(A)$. 实际怎样?反正都一样吗?

问题 170. 给出 $0\notin W(A)$的拟幂零算子 A 的一例.

请注意任何这一类例子都是问题 168 的解.

171. 正规性与数值值域. 数值值域的闭包可能比谱大得很多吗?答案是:能. 一个扫兴的例子是

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};$$

谱是很小的($\{0\}$),但数值值域则是大的$\left(\left\{z: |z|\leqslant\frac{1}{2}\right\}\right)$. 在正规算子中,这一类极端的例子不会存在; 对它们说, 数值值域的闭包是小到象谱和数值值域的一般性质所允许的范围那么小.

为了精确地表述这个结果, 必须引进集 M 的凸包这个概念,

其记号为 conv M.依定义, conv M 就是包含 M 的最小凸集; 换句话说, conv M 就是包含 M 的一切凸集的交. 在有限维欧几里得空间中,紧集的凸包是闭的,这是一个非不足道的事实. 对平面说,这个事实的最有用的表述可能是如下的:紧集的凸包是包含它的一切闭半平面的交. Valentine[1964]是讨论所有这些问题的一个有用的参考文献.

从闭集得出凸集已经讨论了不少. 从凸集得出闭集的逆程序讨论起来则简单得多; 凸集的闭包是凸集,这命题是真的而且容易证明.

问题 171. 正规算子的数值值域的闭包是它的谱的凸包.

作为一个应用,试考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $|\lambda|=1$. 由于这是个酉矩阵,因而是正规的,刚才证明的结果蕴涵它的数值值域是它的特征值的凸包. 这些特征值容易算出(它们是 λ 的诸立方根),这就证明了(问题 166 的讨论过程中作的)断语:这个特殊矩阵的数值值域是以 λ 的诸立方根为顶点的三角形.

上面那个一般结果包含了以下的特殊断语, 即每一个有限对角矩阵的数值值域是它的对角线元素的凸包. 这个特殊断语有一个与上述不同的推广, 即直接和的数值值域是其诸加项的数值值域的凸包. 这个推广的证明是直捷的. 作为一例,试考虑

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad (1)$$

的直接和,由此可重获(在问题 166 讨论过程中所作)关于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的数值值域是一圆顶锥形的断语.

172. 次正规性与数值值域.

问题 172. 如果把问题 171 的假设条件中的“正规”换成“次正规”，其结论是否仍是真的？

173. 数值半径. 数值值域，就象谱一样，使每一算子对应着一个集；它是一个算子的集函数．有一个与之密切关联着的数值函数 w，称为数值半径，由下式定义：

$$w(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in W(A)\},$$

(参看问题 74 中谱半径的定义)．数值半径的性质有些是肤浅的，其他则十分深刻．

易证 w 是一个范数．就是说：$w(A)\geqslant 0$，且 $w(A)=0$ 当且只当 $A=0$；对每一数量 α 有 $w(\alpha A)=|\alpha|\cdot w(A)$；且 $w(A+B)\leqslant w(A)+w(B)$．这个范数等价于通常的范数，意即，各范数均以另一范数的一个常数倍为界：

$$\frac{1}{2}\|A\|\leqslant w(A)\leqslant\|A\|$$

(参看 Halmos[1951, p. 33])．范数 w 有其它许多令人惬意的性质；例如，$w(A^*)=w(A)$，$w(A^*A)=\|A\|^2$，且 w 是酉不变式，其意即当 U 是酉算子时恒有 $w(U^*AU)=w(A)$．

由于 $\Lambda(A)\subset\overline{W(A)}$（问题 169），在谱半径和数值半径之间有一个浅易的不等式：

$$r(A)\leqslant w(A).$$

拟幂零(在这里，也可用幂零)算子的存在性指明类似反向不等式的关系不可能是真的．

问题 173. (a) 如果 $w(1-A)<1$，则 A 可逆；(b) 如果 $w(A)=\|A\|$，则 $r(A)=\|A\|$．

174. 正规型、凸型以及谱型算子. 如果 A 是正规的，则 $w(A)=\|A\|$．Wintner 把满足 $w(A)=\|A\|$ 的算子 A 叫做正规型的．正规算子 A 另有一个有用（但没有名称）的性质，即 $\overline{W(A)}$ 是 $\Lambda(A)$ 的凸包（问题 171）．为了使具有这个性质的（不一定是正规的）算子有一个暂时的标签，我们称它们为凸型算子．正规算子还有另一个（无名的）性质，就是 $r(A)=w(A)$；称具有这个性质的算

子为谱型算子. 问题173有一个推论, 即每一个正规型算子是谱型的. 每一个凸型算子是谱型的,这也是真的. 的确,由于圆心在0, 半径为$r(A)$的闭圆域包含着$\Lambda(A)$且是凸的, 得知如果A是凸型的,则该圆域包含着$W(A)$. 这蕴涵$w(A)\leqslant r(A)$, 从而A是谱型的.

问题174. 讨论凸型与正规型两性质的蕴涵关系.

175. 数值值域的连续性. 数值值域在什么意义下是其变元的连续函数(参看问题85和86)?要把问题准确地提出来, 最好是利用平面的紧子集的 Hausdorff 度量. 为了定义该度量, 对每一复数的集M和每一正数ε,记

$$M+(\varepsilon)=\{z+\alpha: z\in M, |\alpha|<\varepsilon\}.$$

使用了这个记号, 就可以说, 如果M和N是紧集, 它们间的 Hausdorff 距离$d(M,N)$就是使得$M\subset N+(\varepsilon)$且$N\subset M+(\varepsilon)$都成立的正数ε全体的下确界.

由于 Hausdorff 度量是对紧集定义的, 要讨论的适当的函数是$\overline{W}$,而不是W. 说到连续性问题,算子有多少种拓扑,就还有多少种解释. $\overline{W}$是弱连续的?强连续的?一致连续的?关于w又怎样?唯一立即可以明显地看出的结果是,如果$\overline{W}$关于任何拓扑是连续的,则w也是如此,从而如果w是不连续的,则$\overline{W}$也是.

问题175. 在弱、强和一致算子拓扑中, 讨论$\overline{W}$和w的连续性.

176. 幂不等式. 数值值域和数值半径的好的性质必须与凸性和线性有关, 数值值域与算子的乘法性质的关系则是比较不顺利的. 例如,w肯定不是乘法的,即$w(AB)$不恒等于$w(A)\cdot w(B)$ (以可交换正规算子为例: 如果

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad 而 \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则$w(A)=w(B)=1$而$w(AB)=0$). 对于w说, 其次一个可能有的最好的性质是次可乘的($w(AB)\leqslant w(A)w(B)$),但这也不成立.

例：如果
$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad 且\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$
则 $w(A)=w(B)=\frac{1}{2}$，而 $w(AB)=1$. 由于 $w(AB)\leqslant\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$，得知对正规算子说，$w$ 是次可乘的（因为如果 A, B 是正规算子，则 $\|A\|=w(A)$ 且 $\|B\|=w(B)$），而对一般的算子说，$w(AB)\leqslant 4w(A)w(B)$（因为 $\|A\|\leqslant 2w(A)$ 且 $\|B\|\leqslant 2w(B)$）. 上面用以指明 w 不是次可乘的例子还指明了常数 4 在这里是最好的了.

可交换性有时是有助益的，但在这里却不然. 使 $w(AB)>w(A)w(B)$ 成立的可交换算子 A 和 B 的例子稍难找到，但它们的确存在. 下面是一例：
$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$
而 $B=A^2$. 容易看到 $w(A^2)=w(A^3)=\frac{1}{2}$. $w(A)$ 的值稍难计算，但不需要算它；近于显然的关系 $w(A)<1$ 就够了. 的确：$w(AB)=w(A^3)=\frac{1}{2}>w(A)\cdot\frac{1}{2}=w(A)w(B)$.

唯一还没有排除的点滴乘法性质是幂不等式
$$w(A^n)\leqslant(w(A))^n.$$
这倒是真的，但是需要突出的机巧. 即使对二乘二矩阵说，也不能通过简单的计算来得到这结果. 如果着眼点不是维数而是指数，譬如 $n=2$，则存在着相对地简单的证明，但即使这样的证明也要求惊人地精致地掌握. 一般的情形则更要求干劲或是创造性.

问题 176. 如果 A 是一个使得 $w(A)\leqslant 1$ 的算子，则对每一个正整数 n，有 $w(A^n)\leqslant 1$.

这个陈述显然是幂不等式的一个推论. 为了证明它也蕴涵幂

不等式，试如下推理．如果 $w(A)=0$ 则 $A=0$，而一切是不足道的．如果 $w(A)\neq 0$，则记 $B=A/w(A)$，注意 $w(B)\leqslant 1$，使用问题 176 的陈述推出 $w(B^n)\leqslant 1$，即得 $w(A^n)\leqslant(w(A))^n$ 的结论．

已知该定理的若干推广．这里有一个漂亮的：如果 p 是一个多项式，它使得 $p(0)=0$ 且当 $|z|\leqslant 1$ 时，恒有 $|p(z)|\leqslant 1$，又若 A 是使 $w(A)\leqslant 1$ 的一个算子，则 $w(p(A))\leqslant 1$．加上一点细心的处理，多项式可以换成解析函数，而且加上大量的细心处理，单位圆域(由于着重于不等式 $|z|\leqslant 1$ 而进入问题)也可以换成其它紧凸集．

幂不等式的第一个证明属于 C. A. Berger．沿着前段所举的方向的第一个推广由 J. G. Stampfli 导出．用十分一般的形式首先发表的说法由 Kato[1965]给出．沿着完全不同方向的另一个有趣的推广见于 Nazy-Foiaş [1966]．

第十八章 酉 膨 胀

177．**酉膨胀**．假设 $\mathbf{H}$ 是希耳伯特空间 $\mathbf{K}$ 的一个子空间，并令 P 表示自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 上的(正交)投影．$\mathbf{K}$ 上的每一算子 B 依下述的自然方式诱导一个 $\mathbf{H}$ 上的算子 A，即对 $\mathbf{H}$ 中的每一矢量 f，A 定义如

$$Af=PBf.$$

A 与 B 间的关系也可以由

$$AP=PBP$$

表示出来．在这条件下，A 叫做 B 到 $\mathbf{H}$ 上的压缩而 B 叫做 A 到 $\mathbf{K}$ 上去的一个膨胀．压缩与膨胀的这个几何的定义可以与惯常的限制与扩张的概念相比较：如果碰到 $\mathbf{H}$ 是在 B 下不变的，便不必要把 Bf 再经过投影回到 $\mathbf{H}$ 上(它已经在那里了)，在这种情况下，A 就是 B 在 $\mathbf{H}$ 上的限制，而 B 则是 A 到 $\mathbf{K}$ 上去的一个扩张．限制-扩张是压缩-膨胀的一种特例，即在大空间上的算子作用下，小空间保持不变时的特例．

引导到压缩与膨胀的道路，既有几何的道路又有代数的道路．代数的道路中有一条是通过二次型的．可以考虑伴随着 B 的二次型，并且可以只联系 $\mathbf{H}$ 中的矢量来考虑它(即把它限制到 $\mathbf{H}$ 上)．这个限制是 $\mathbf{H}$ 上的一个二次型，因而一定是由 $\mathbf{H}$ 上的一个算子诱导的；这个算子就是压缩 A．或换句话说，算子的压缩与膨胀不但与限制与扩张类似(且是它们的推广)，而且，以二次型为构架，它们就是限制与扩张：A 的二次型是 B 的二次型在 $\mathbf{H}$ 上的限制，而 B 的二次型是 A 的二次型到 $\mathbf{K}$ 上去的一个扩张．

在希耳伯特空间理论中，压缩与膨胀有另一个表现形式，它是与算子矩阵联系着的．如果把 $\mathbf{K}$ 分解成 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}^{\perp}$，而且 $\mathbf{K}$ 上的算子相应地用矩阵表示(该矩阵的元素是 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}^{\perp}$ 上的算子以及 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}^{\perp}$ 之间的线性变换)，则 B 是 A 的膨胀的充要条件是 B 的矩阵具有下形

$$\begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

问题 177．(a)如果 $\|A\|\leqslant 1$，则 A 有一个酉膨胀．(b)如果 $0\leqslant A\leqslant 1$，则 A 有一个膨胀是投影算子．

注意在这两种情形下，题设都明显地是必要条件．如果 A 有一个膨胀 B 是压缩算子[注]，则 $\|Af\|=\|PBf\|\leqslant\|Bf\|\leqslant\|f\|$ 对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 成立，又如果 A 有一个正的膨胀 B，则 $(Af,f)=(Bf,f)\geqslant 0$ 对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 成立．

系．每一个算子有一个正规膨胀．

178．**酉幂膨胀**．看来最不象酉算子的压缩算子是 0，但即使它也有一个酉膨胀．按照解 177 的构造法把它展示出来，就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个构造法在某种意义下是标准的，但它并没有许多有用的代数性质．例如，膨胀的平方是平方的膨胀就不一定成立；的确 0 的上

[注] 压缩算子(contraction)与压缩(compression)意义完全不同，请注意．这两译名易致混淆，但已经通行，只好沿用之．——译者注

列的膨胀的平方是

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

这不是 0 的平方的膨胀. 0 有没有一个对平方说也是相宜的酉膨胀?答案是:有,

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

是一例. 这个膨胀的平方是

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

它是 0 的平方的一个膨胀. 可是不幸的是, 这个膨胀也不是理想的; 它的立方是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

这不是 0 的立方的一个膨胀. 立方的缺陷可以借助过渡到

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

而得到补救,但四次幂又失败了. 归纳法的奢望没有止境; 它明显地提出一个最后要求, 就是要得到 0 的一个酉膨胀, 它具有性质: 它的一切幂都是 0 的膨胀. 用矩阵的语言说, 即要求具有下述性质的酉矩阵,就是说, 它有一个对角(线上的)元素是 0, 而且它的一切幂的对应元素也是 0. 就上述有限的例子粗略地思考一下, 或单纯凭灵感以猜测, 可能就会提出答案来; 双侧移位是可用的, $\langle 0, 0\rangle$ 的元素作为上述特定的元素(注意: 单侧移位不是酉算子). 上面的各种考虑提出一个一般的定义: 算子 B 叫做算子 A 的幂

膨胀(有时叫做强膨胀)，如果对 $n=1, 2, 3, \cdots$, B^n 都是 A^n 的一个膨胀.

问题 178. 每一个压缩算子有一个酉幂膨胀.

对适应种种要求的膨胀说，必须指出，它们至少都有一个有用的代数性质：如果 B 是 A 的膨胀，则 B^* 是 A^* 的膨胀. 通过二次型的证明是最快的：如果对 A 的定义域中的每一个 f 有 $(Af, f)=(Bf, f)$，则对同样的 f, $(A^*f, f)=(f, Af)=(Af, f)^*=(Bf, f)^*=(f, Bf)=(B^*f, f)$. 这断语有一个推论是，如果 B 是 A 的幂膨胀，则 B^* 是 A^* 的幂膨胀.

幂膨胀定理首先由 Nazy[1953]证明. 此后该课题受到大量注意；在 Nazy[1955]和 Mlak[1965]中对所得结果有很好总结. 这个理论中讨论极小酉幂膨胀的部分特别有趣. 极小酉幂膨胀的定义与极小正规扩张的定义(问题 155)相似，它们也被给定的算子(在酉等价范围内)唯一地确定. 奇特的事实是，算子的极小酉幂膨胀的知识并不如我们所想象的那么有助益. Schreiber[1956]证明可分希耳伯特空间上的一切真压缩算子(参看问题 122)有同一极小酉幂膨胀，一个双侧移位；Nazy[1957]把这个结果推广到不可分空间.

179. 遍历定理. 如果 u 是一个模为 1 的复数，则平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} u^j$$

构成一个收敛序列. 这是经典分析的一项有趣而简单的结果，其各种推广有广泛的应用. 为了证明该陈述，试分别考虑 $u=1$ 和 $u\neq 1$ 的情形. 如果 $u=1$，则各平均值都等于 1，而极限是 1. 如果 $u\neq 1$，则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} u^j\right| = \left|\frac{1-u^n}{n(1-u)}\right| \leqslant \frac{2}{n|1-u|},$$

而极限是 0.

前段结果可以(从数)推广到算子去，其中最近情近理的推广以酉算子的平均遍历定理闻名；它断言如果 U 是希耳伯特空间上

的酉算子，则平均(算子)

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}U^j$$

构成一个强收敛序列．要使遍历定理的内容提供更多信息，大概总要进一步描述极限；事实上，这极限是一个投影，其值域是子空间 $\{f:Uf=f\}$，即 U 的不动点全体形成的子空间．

类似的遍历定理不但对于酉算子为真而且对一切压缩算子为真，这是一个比较不明显的结果．

问题 179．如果 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的压缩算子，则

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}A^j\right\}$$

是 $\mathbf{H}$ 上的一个强收敛算子序列．

180．谱集． 如果 F 是定义于集 M 上的有界复值函数，记

$$\|F\|_M=\sup\{|F(\lambda)|:\lambda\in M\}.$$

如果 A 是一个具有谱 Λ 的正规算子，又 F 是 Λ 上的有界波雷耳可测函数，则 $\|F(A)\|\leqslant\|F\|_\Lambda$．(等号一般不一定成立；$F$ 可能取一些大的值，这些值不会对 $F(A)$ 发生测度论上可察觉的影响)．这个不等式怎么能够推广到非正规算子去不是显然的．存在着两个障碍：一般，$F(A)$ 没有意义，而且在它有意义的时候，结果可能是谬误的．有一个绕避这两个障碍的容易方法：只考察使得 $F(A)$ 的确有意义的那些函数 F，并且替代 Λ，只考虑使不等式成立的那些集．以这些特殊的考虑为基础，可以建立起一个有生命力的理论．

如果考虑的函数只是多项式，则它们可作用于任一算子．可是，如果算子的谱太小，范数间的不等式将不成立．例如 A 是拟幂零算子而 $p(z)=z$，则 $\|p(A)\|=\|A\|$ 而 $\|p\|_{\Lambda(A)}=0$；只当 $A=0$ 时，不等式 $\|p(A)\|\leqslant\|p\|_{\Lambda(A)}$ 成立．最早期的肯定性的结果以 von Neumann–Heinz 定理闻名，该结果至今是这些方向的最锋锐且最能增进知识的陈述(参考文献：von Neumann [1951]，Heinz [1952])．

问题 180. 如果$\|A\|\leqslant 1$, 又 D 是闭单位圆域, 则对每一个多项式 p, 有

$$\|p(A)\|\leqslant\|p\|_D.$$

本定理所属的总题材称为谱集理论. 该理论所研究的是有理函数而不仅是多项式. 粗略地说, 一个算子的谱集就是一个数集, 相应的上述范数不等式对于该集上一切有理函数都能成立. 精确地说, A 的谱集就是一集 M, 它使得 $\Lambda(A)\subset M$ 并且使得如果 F 是 M 上的一个有界有理函数(就是在 M 的闭包上没有极点的有理函数), 则$\|F(A)\|\leqslant\|F\|_M$(注意关于可允许的 F 的极点的条件蕴涵 $F(A)$对各个这样的 F 都有意义). 易推知, 如果谱集的定义中要求该集是闭, 或甚至是紧的, 不致使本理论的普遍性减弱, 而且通常就是这样要求的. 仅要求范数不等式对多项式成立则却的确使定义发生重要的改变. 但是用一个颇为深奥的复变函数论的论证(参看 Lebow[1963])可以证明, 如果问题中的数集足够简单则多项式定义与有理函数定义是相同的. (对此目的说, 如果一集是紧的且其余集是连通的, 它便是足够简单的.) 考虑到最后这个评注, von Neumann-Heinz 定理时常叙述如下: 闭单位圆域对每一个压缩算子说都是一个谱集.

181. 正定序列的膨胀. 酉幂膨胀的定理(问题 178) 说明某些算子序列可以通过压缩一个酉算子的幂序列而得到. 更精确地说, 如果 A 是 $\mathbf{H}$ 上的一个压缩算子, 且 $A_n=A^n$ 当 $n\geqslant 0$, 而 $A_n=A^{*n}$ 当 $n\leqslant 0$, 则在包含着 $\mathbf{H}$ 的一个空间上, 存在一个酉算子 U, 使得 U^n 到 $\mathbf{H}$ 上的压缩便是 A_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 其他的什么序列 $\{A_n\}$ 也能用这样的方法得到? 这样的序列有否一个有用的内在特征? 这些问题的答案可以利用算子的正定序列而得到最好的表述. 酉算子的幂的序列可以证明是(在强的意义下)正定的; 正定序列的压缩本身是正定的, 而且对适当规范化了的序列说, 正定性事实上也是具有正定酉膨胀的充要条件. 详细的说明和定义见下:

序列 $\{A_n: n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是正定的, 如果对每一个有限

非零的矢量序列 $\{f_n\}$ 有

$$\sum_i \sum_j (A_{i-j} f_i, f_j) \geqslant 0.$$

一个通过极化的标准的初等论证证明正定序列必是自伴对称的，意即，对一切 n 有 $A_n^* = A_{-n}$.

如果 $A_n = U^n$ 而 U 是酉算子，则

$$(A_{i-j} f_i, f_j) = (U^{i-j} f_i, f_j) = (U^i f_i, U^j f_j),$$

因此

$$\sum_i \sum_j (A_{i-j} f_i, f_j) = \sum_i \sum_j (U^i f_i, U^j f_j) = \|\sum_i U^i f_i\|^2 \geqslant 0;$$

U 的幂的序列是正定的.

现在假设 U 是 $\mathbf{K}$ 上的酉算子，$\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{K}$ 的一个子空间，且 P 是自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的投影. 如果对 $\mathbf{H}$ 中的每一个 f 有 $A_n f = PU^n f$（即如果 A_n 是 U^n 到 $\mathbf{H}$ 上的压缩），又 $\{f_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中的有限非零的矢量序列，则

$$(A_{i-j} f_i, f_j) = (PU^{i-j} f_i, f_j) = (U^{i-j} f_i, f_j);$$

由此得知 $\{A_n\}$ 是正定的. 序列 $\{A_n\}$ 也是规范化（意指 $A_0 = 1$）了的；$A_0 = 1$ 的理由是 $U^0 = 1$.

前段已经介绍了正定性并且证明了它是具有酉膨胀的必要条件（所谓一个序列的酉膨胀，其意义如同上文，是指该序列的每一项是一个固定的酉算子的对应的幂的压缩）. 现在的主要任务是去证明该条件也是充分的（参考文献: Nazy[1955]）.

问题 181. 如果 $\{A_n\}$ 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的正定算子序列，$A_0 = 1$，则存在一个包含着 $\mathbf{H}$ 的希耳伯特空间上的酉算子 U，使得 U^n 到 $\mathbf{H}$ 上的压缩是 A_n.

即使给定的希耳伯特空间是一维的，这个问题也不是不足道的. 在这情形下它说的是，如果 $\{\alpha_n\}$ 是一个正定的复数序列，$\alpha_0 = 1$，则存在一个希耳伯特空间 $\mathbf{K}$，存在 $\mathbf{K}$ 中的一个单位矢量 f，而且存在一个 $\mathbf{K}$ 上的酉算子 U 使得对每一个整数 n 有 $\alpha_n = (U^n f, f)$. 如果用某一个 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上的乘子 φ 诱导的乘法来表示 U，上面的结果就是 $\alpha_n = \int \varphi^n |f|^2 d\mu$. 通过一个标准的变元变换法，这可

以改述如下：存在一个定义于单位圆上的诸波雷耳集上的规范化了的测度 ν 使得对一切 n 有 $\alpha_n=\int\lambda^n d\nu(\lambda)$. 在这个形式下，本陈述有时叫做 Herglotz 的定理；它已被广泛地推广于整数加群以外的群. 从膨胀理论和谱理论引导出 Herglotz 的定理可能不是得到该定理的最省力的方法，但它确是(得到它的)一个方法. 无论如何，能够从而认识到希耳伯特空间理论与经典的分析学间的又一个联系是有好处的.

第十九章　算子的换位子

182. 换位子. 著名的 Heisenberg 测不准原理的一个数学表述方式是：某一对线性变换 P 和 Q 经过适当的规范化后适合方程 $PQ-QP=1$. 构成这种性质的一个具体例子是容易的，试考虑 $\mathbf{L}^2(-\infty,\infty)$并令 P 和 Q 分别表示微分变换和位置变换(即 $(Pf)(x)=f'(x)$，而$(Qf)(x)=xf(x)$). 它们自然不是有界的，它们的定义域远不是整个空间，而且在其它许多方面有不正常的性质. 能够消除去这些不正常性质吗？

为了精确地叙述这个问题，我们给出换位子的定义，定义它为一个形如 $PQ-QP$ 的算子，这里的 P 和 Q 是一个希耳伯特空间上的算子. 在文献中可以找到这个词的更广泛的使用(例如，巴拿哈空间上的换位子)，它们中绝大多数与我们现在所给的定义没有抵触. 我们所想要排除的主要是无界情形. 前段的问题可以这样地叙述："1 是一个换位子吗？"答案是"否".

问题 182. 等于倍乘的换位子只能是 0.

有限维的情形易于解决. 理由是这时有迹的概念可以利用. 迹是线性的，而且两因子的乘积的迹不依赖于因子的次序. 由此得知换位子的迹必是 0；具有迹 0 的倍乘算子就是 0 本身. 这证明了那个否定陈述. 由此可得到更多结果：事实上有限方阵是一个换位子当且只当它的迹是 0(Shoda[1936], Albert-Muckenhoupt

[1957]).

关于一般(不一定有限维)的情形,已知有两个优美的证明,相互之间大不相同;它们属于 Wintner[1947] 和 Wielandt[1949]. 无须作何改变,它们都适用于任意的具单位元的复赋范代数. 一个赋范代数是这样的一个线性赋范空间,它同时又是使得

$$\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

对一切 f 和 g 成立的一个代数. 赋范代数的单位元当然是一个使得 $ef=fe=f$ 对一切 f 成立的元素 e; 习惯上还再要求 $\|e\|=1$. Wintner 和 Wielandt 的证明的代数性质可以利用来得到关于换位子的更多信息,如下述.

恒等算子是一个投影;它是具有零秩 0 的唯一投影(请回忆一个算子的零秩即其核的维数). 具有零秩 1 的(无穷维希耳伯特空间上的)投影怎么样;它有可能是一个换位子吗?凭直观,会随声给出一个否定的答复,而这一次,直观倒是正确的(Halmos[1963a]). 考虑算子全体构成的赋范代数和它里面的紧算子理想. 商代数是一个赋范代数,在该代数中,单位元不是换位子(据 Wintner 和 Wielandt);经过翻译回到算子代数来,这就意味着恒等算子不能等于一个换位子和一个紧算子的和. 由于零秩 1 的投影是这样的和[注]的一个很特殊的例子,证明已告完成. 下列命题总结了这个证明所证明的结果.

系. *紧算子与非零倍乘算子的和不是换位子.*

这个系给出了一个算子不是换位子的一个充分条件;在这个课题中最令人惊讶的事实就是在可分空间上这条件也是必要的(Brown-Pearcy[1965]). 换句话说,在可分空间上每一个不是非零倍乘与紧算子的和的算子一定是一个换位子. 证明不是简短的.

183. 换位子的极限. 已知恒等算子不是一个换位子,但它至少是一个换位子的极限吗?换句话说,是否存在着算子序列 $\{P_n\}$

[注]　原文如此,但从上下文看"这样的和"应改为"恒等算子和一个紧算子的和"才有意义.——译者注

和 $\{Q_n\}$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\|1-(P_nQ_n-Q_nP_n)\|\to 0$? 换位子的 Brown-Pearcy 特征(参看问题 182)蕴涵答案是“对”(也参看问题 187). 较弱的结果是较易得到的.

问题 183. 如果 $\{P_n\}$ 和 $\{Q_n\}$ 是算子的有界序列(即,如果存在正数 α 使得对一切 n 有 $\|P_n\|\leqslant\alpha$ 和 $\|Q_n\|\leqslant\alpha$), 又如果序列 $\{P_nQ_n-Q_nP_n\}$ 依范数收敛于算子 C, 则 $C\neq 1$.

换句话说: 恒等算子不可能是由有界序列构成的换位子的极限(参考文献: Brown-Halmos-Pearcy[1965]).

184. Kleinecke-Shirokov 定理. 问题 182 的结果说, 如果 $C=PQ-QP$ 而 C 是一个倍乘算子, 则 $C=0$. 证明中怎样用到 C 是倍乘算子的假定? 检查一下 Wielandt 的证明至少可启示部分的答案: C 与 P 可交换是重要的. 具有这类可交换性的换位子受到了一些注意; 原始问题 ($PQ-QP=1$?) 就适于作为它们的理论的题材. $PQ-QP$ 要想成为与 P 可交换的算子的一种容易的途径是等于 P. 例如:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

如果遇到这种情形,则一个简易的归纳法的论证证明 $P^nQ-QP^n=nP^n$,而这蕴涵对每一正整数 n 有

$$n\|P^n\|\leqslant 2\|P^n\|\cdot\|Q\|.$$

由于 $n\leqslant 2\|Q\|$ 对一切 n 成立是不可能的,得知对某一 n, $P^n=0$, 即 $P(=PQ-QP)$ 是幂零的.

第一个这一类的一般定理属于 Jacobson[1935], 他证明了, 在适当的有限性条件下,如果 $C=PQ-QP$ 且 C 与 P 可交换,则 C 是幂零的. 这是关于倍乘算子的结果的合理的推广; 幂零的倍乘算子毕竟只有 0. 在无穷维希耳伯特空间中, 那些有限性条件不大可能会被满足. Kaplansky 推测: 如果把幂零性换成它的恰当的推广, 如拟幂零性, 则 Jacobson 定理将可推广于(一般的)算子,结果证明他是正确的. Kleinecke[1957] 和 Shirokov[1956]

独立地发现了该推广的证明.

问题 **184**. 如果 P 和 Q 是算子, 如果 $C=PQ-QP$, 又如果 C 与 P 可交换, 则 C 是拟幂零的.

185. 从换位子到恒等算子的距离 据 Wintner 和 Wielandt, 换位子不能等于1; 据 Brown-Pearcy, 换位子能接近 1 到任意程度. 可是, 一个换位子通常总盼望与1离得远一些.

问题 **185**. (a)如果 $C=PQ-QP$ 又 P 是亚正规的(从而, 特别是, 如果 P 是一个等距算子, 或 P 是正规的), 则 $\|1-C\|\geqslant 1$. (b)如果 C 与 P 可交换, 则 $\|1-C\|\geqslant 1$.

如果基础希耳伯特空间是有限维的, 则证明 $\|1-C\|\geqslant 1$ 对一切换位子 C 成立是线性代数中一个容易的练习题.

186. 大核算子. 就构造换位子问题而论, 以前各问题的所有结果都是否定性的. 它们全说的是某种算子不是换位子.

为了得到一个肯定性的结果, 假设 $\mathbf{H}$ 是一个无穷维希耳伯特空间并考虑无穷直接和 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\cdots$. 这个大空间上的算子可以表示成以 $\mathbf{H}$ 上的算子为元素的无穷矩阵. 特别是, 如果 A 是 $\mathbf{H}$ 上任意的一个算子(它甚至可能是恒等算子), 则矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & A & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

定义一个算子; 如果

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

则可以毫无困难地验证

$$PQ-QP=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbf{H}$ 的无穷多个摹本的直接和是第一摹本和其它摹本的直接和，又由于其它摹本的直接和同构(酉等价)于 $\mathbf{H}$，得知每一个形如

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的 2×2 算子矩阵是一个换位子(Halmos[1952b]，[1954])。

不用矩阵而重新表述上述结果是有意义的．把希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个子空间 $\mathbf{M}$ 叫做大的，如果 $\dim\mathbf{M}=\dim\mathbf{H}$ (这个思想以前已经出现，即使这个名称还没有用过；参看问题 111)．使用这样的语言，就可以说，如果 $\mathbf{H}$ 是无穷维的，则 $\mathbf{H}$(视为直接和 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 的一个削减) 是 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 的一个大子空间．如果 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 上的一个算子的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则该算子有一个大核，而且这个核还约化 A[注]．如果，反过来，无穷维希耳伯特空间上算子有一个大的约化核，则该算子可以用形如

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵来表示(把空间表示成核及其正交补的直接和．如果该正交补太小，把核的“一半”添加上去以扩大它)．考虑到这些评注，前段的矩阵的结果可以如下表达：每一个具有大的约化核的算子是一个换位子．这个结果还可以改进(Pearcy[1965])。

[注] 此处“A”当为“算子 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$”之误．——译者注

问题 186. 每一个具有大核的算子是一个换位子.

系 1. 在无穷维希耳伯特空间上,换位子是强稠密的.

系 2. 无穷维希耳伯特空间上的每一个算子是两个换位子的和.

系 2 指明在无穷维希耳伯特空间上的算子全体所构成的代数上不存在着类似迹的东西. 理由是,堪称为"迹"的线性泛函必须在换位子全体的集上取值 0. 从而,据系 2,必恒等于 0.

187. 直接和作为换位子.

问题 187. 如果可分希耳伯特空间上的算子 A 不是倍乘算子,则无穷直接和 $A\oplus A\oplus A\oplus\cdots$,是一个换位子.

虽然这个结果还远不能作为换位子的一个完全的特征,它却答复了关于它们(换位子)的许多明显的问题. 例如,作为一个直接的系,可以说换位子的谱是十分随意的;更精确地说,平面上每一个非空紧子集(就是说,凡是可以作为谱的任意集)是某一个换位子的谱. 另一个直接的系是,恒等算子是换位子的(依范数)的极限;试与问题 183 和 185 比较.

证明所需的技巧含有证明换位子的一般特征 (Brown-pearcy [1965])所需的技巧的芽胚(固然是很初始的芽胚).

188. 正的自换位子. 算子 A 的自换位子就是算子 A^*A-AA^*. 自换位子的理论是有趣的. 已知有限方阵是一个自换位子当且只当它是自伴(厄尔米特)的且有迹 0(Thompson[1958]). 一种明显的与自换位子有关联的算子就是亚正规算子; A 是亚正规的充要条件是 A 的自换位子是正的. 自换位子可以是非平凡地正的,这是个较罕见的现象(顺便说,它是严格无穷维的现象). 很自然地会问:自换位子可能(有)多(少是)正(的),而答案是"不很(多是)正(的)".

问题 188. 正的自换位子必不可逆.

参考文献:Putnam[1951a]

189. 投影作为自换位子. 如果一个自换位子 $C=A^*A-AA^*$ 是正的,则据问题 188, C 是不可逆的. C 要成为不可逆的最容易

的途径是有一个非平凡核. 在有非平凡核的正算子中，最习见的是投影. C 能是一个投影吗？如果能，怎样才是？

C 要成为投影的最显然的途径是 A 是正规的；这时 $C=0$. 其它途径，不管它们是怎样的途径，总可以和(与)正规算子(构成直接和)结合起来以得到另一途径，但这样做只有不足道的差异. 这里令人感兴趣的是涉及可以叫做完全非正规的算子的问题，这类算子就是没有上述正规直和加项的算子. 换一种讲法，A 是完全非正规的，如果 A^*A-AA^* 的核的非零子空间都不约化 A.

不难构成完全非正规算子的例子，使其自换位是一个投影：从任一非正规的等距算子都可得到这类例子. 如果 A 是一个非正规的等距算子(即一个重数非 0 的单侧移位和一个酉算子的直接和——参看问题 118)，则 $\|A\|=1$ 且 $C=A^*A-AA^*=1-AA^*$ 是到 A^* 的核上的投影. 有趣的是，在加上范数条件($\|A\|=1$)后，这是构成这类例子的唯一途径.

问题 189. (a)如果 A 是一个完全非正规算子，具有范数 1，并使得 A^*A-AA^* 是一个投影，则 A 是一个等距算子. (b)如果不假定范数条件，这陈述还是真的吗？

190. 乘法换位子. "换位子"一词出现于两种不同的数学内容中，在环论中它指的是 $PQ-QP$(加法换位子)；在群论中它指的是 $PQP^{-1}Q^{-1}$(乘法换位子). 关于迹与行列式，以及更一般地关于对数与指数的关系，进行一些审慎合理的猜测，很可能引导到关于加法换位子的结果在乘法方面的类比的表述. 有一些这样的类比是真的. 根据一个关于加法的定理，是加法换位子的倍乘算子只有 0，这个加法的定理的类比怎么样？

问题 190. 如果 $\mathbf{H}$ 是一个无穷维希耳伯特空间，则作用于 $\mathbf{H}$ 上的倍乘算子 α 是一个乘法换位子的充要条件是 $|\alpha|=1$.

在有限维空间中可以运用行列式. 乘法换位子的行列式是 1，唯一的行列式是 1 的倍乘算子是 1 的根，其根指数等于空间的维数. 这证明了在一个 n 维空间上倍乘算子 α 是乘法换位子的一个必要条件是 $\alpha^n=1$；将这个论证加以修改使之适用于无穷维空间即

能证明这条件同样是充分的.

如同在加法理论中,必要性的证明表现为代数的,就是说对于随意的一个具单位元的复赋范代数,它也能引致同样的必要条件.正如在加法理论中,从这个结果接着又能推知,如果一个换位子以紧算子为模合同于倍乘算子,则该倍乘算子(的倍数)必有模 1.

191. 酉乘法换位子. 问题 190 的肯定断语可以大大加强,走向加强了的理论的最大的步骤之一是下述断语.

问题 191. *在无穷维希耳伯特空间上,每一个酉算子是乘法换位子.*

192. 换位子子群. 一个群的*换位子子群*是含有形如 $PQP^{-1}Q^{-1}$ 的一切元素的最小子群. 换句话说,它是由一切换位子(当然是乘法的)生成的子群. 希耳伯特空间上可逆算子全体的集是一个乘法群;与标准的有限维的术语相类似,它可以叫做该空间的*全线性群*.

问题 192. *无穷维希耳伯特空间的全线性群的换位子子群是什么?*

第二十章 Toeplitz 算子

193. Laurent 算子和矩阵. 乘法算子是正规算子的原型,关于它们的明显的问题(例如关于数值值域,范数和谱的那些问题),大多数有明显的解答.(这并不是说关于它们的每一个问题已经得到解答.)还有,乘法对空间的改变不大敏感.除稍为繁复的原子的组合以及不可数性引起的病态之外,在单位区间和单位圆上发生的一切都可作为在他处可能发生的情况的典型.

如果 φ 是单位圆上的有界可测函数,则 φ 在 $\mathbf{L}^2$ 上(关于规范化的勒贝格测度 μ)诱导的乘法有时叫做 φ 诱导的 Laurent 算子,以记号 L_φ 表示之. L_φ 的关于 $\mathbf{L}^2$ 中熟悉的标准就范正交基 ($e_n(z)=z^n$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$) 的矩阵有一个简单的形式,它整齐而有规则地与 φ 联系着. 为了描述这个联系,定义 Laurent 矩

阵为这样的一个(双向)无穷矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$,它使得

$$\lambda_{i+1,j+1}=\lambda_{ij}$$

对一切 i 和 $j(=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 成立．用语言表达：Laurent 矩阵是这样的一个矩阵，它的各个(平行于主对角线的)对角线都是常数．

问题 193．$\mathbf{L}^2$ 上的算子是 Laurent 算子 L_φ 的充要条件是它的关于基 $\{e_n: n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 的矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$ 是一个 Laurent 矩阵；如果这个条件被满足，则 $\lambda_{ij}=\alpha_{i-j}$，而 $\varphi=\sum_n \alpha_n e_n$ 是 φ 的富里哀展开式．

194．Toeplitz 算子和矩阵．Laurent 算子(乘法)是(单位圆的)$\mathbf{L}^2$ 上的突出的算子，而 $\mathbf{H}^2$ 是 $\mathbf{L}^2$ 的突出的子空间；如果把 Laurent 算子压缩到 $\mathbf{H}^2$,一定会出现某些有趣的结果．所出现的一切结果的记述叫做 Toeplitz 算子理论． 明白地说：如果 P 是自 $\mathbf{L}^2$ 到 $\mathbf{H}^2$ 上的投影，又 φ 是一个有界可测函数，则 φ 诱导的 Toeplitz 算子 T_φ 的定义是

$$T_\varphi f=P(\varphi\cdot f)$$

对 $\mathbf{H}^2$ 中的一切 f 成立．Laurent 算子的最简单的非平凡的例子是双侧移位 $W(=L_{e_1})$；相应地，Toeplitz 算子的最简单的非平凡的例子是单侧移位 $U(=T_{e_1})$.

$\mathbf{L}^2$ 中有一个自然的基；Laurent 算子关于该基的矩阵有特别简单的形式．关于 $\mathbf{H}^2$ 和 Toeplitz 算子的对应的陈述也是真的．为了给出这个陈述，定义 Toeplitz 矩阵为这样的一个(单向)无穷矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$，它使得

$$\lambda_{i+1,j+1}=\lambda_{ij}$$

对一切 i 和 $j(=0, 1, 2, \cdots)$ 成立．用语言表达：Toeplitz 矩阵是这样的一个矩阵,它的各个(平行于主对角线的)对角线都是常数.
Laurent 理论和 Toeplitz 理论的结构上的差别是深奥的，但是两类矩阵间的差别却是表面的,也易于描述；对于 Laurant 矩阵，两个下标都向两个方向离开 0,但是对于 Toeplitz 矩阵,它们只是向

前进.

问题 194. $\mathbf{H}^2$ 上的算子是 Toeplitz 算子 T_φ 的充要条件是它的关于基 $\{e_n: n=0, 1, 2, \cdots\}$ 的矩阵 $\langle\lambda_{ij}\rangle$ 是一个 Toeplitz 矩阵；如果这个条件被满足，则 $\lambda_{ij}=\alpha_{i-j}$，而 $\varphi=\sum_n \alpha_n e_n$ 是 φ 的富里叶展开式.

条件的必要性没有什么可惊讶的：用一个未曾定义但意义自明的词组来表述，它正说的是，压缩得到的算子具有压缩得到的矩阵.

单侧移位 U 对于 Toeplitz 算子起了双侧移位 W 对于 Laurent 算子所起的作用——但表现有所不同.

系 1. $\mathbf{H}^2$ 上的算子 A 是一个 Toeplitz 算子的充要条件是 $U^*AU=A$.

由于 W 是酉算子，在 $W^*AW=A$ 和 $AW=WA$ 之间没有差异. 关于 U 的对应的两方程所说明的完全不同. 第一方程 $U^*AU=A$ 刻划了 Toeplitz 算子. 第二方程 $AU=UA$ 刻划了解析 Toeplitz 算子(参看问题 116). 当 φ 是解析时(参看问题 26)即当 φ 不仅在 $\mathbf{L}^\infty$ 中且在 $\mathbf{H}^\infty$ 中时，φ 所诱导的 Toeplitz 算子 T_φ 称为解析的(为了肯定这个定义的合理性，请注意问题 194 的陈述蕴涵对应 $\varphi\to T_\varphi$ 是一对一的). 请注意，解析 Toeplitz 算子是次正规的；它不但是对应的 Laurent 算子的压缩，还是它的一个限制.

系 2. 唯一的紧 Toeplitz 算子就是 0.

195. **Toeplitz 乘积**. Laurent 算子全体的集的代数结构平淡无奇. 一切是真的，一切是容易的. 自有界可测函数到算子的映射 $\varphi\to L_\varphi$ 是一个代数同态(它保持了单位，线性运算，乘法，共轭(伴随))，也是一个等距变换(上确界范数到算子范数). L_φ 的谱是 φ 的本性值域. 由于 Laurent 算子组成了 W 的换位(问题 115)，又由于乘积 $W^{-1}AW$ 关于居中的因子是弱连续的，得知 Laurent 算子全体的集是弱闭(从而是强闭)的.

对应的 Toeplitz 陈述有些是真且容易的，但有些是困难的，或谬误的，或未知的．最容易的陈述是关于单位，线性运算和共轭（伴随）的：由于映射 $\varphi \to L_\varphi$ 以及 $L_\varphi \to (PL_\varphi) | \mathbf{H}^2 (=PL_\varphi$ 在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制 $=T_\varphi)$ 都保持被提及的这几个代数结构，它们的复合，即 $\varphi \to T_\varphi$，一定也是这样（保持共轭（伴随）对一般的压缩也是真的，参看问题 178）．证明 Laurent 算子全体的集是弱闭的推理也可用于 Toeplitz 算子；只要把 $W^{-1}AW$ 换成 U^*AU（参看问题 194 的系 1）．

当且只当 φ 是实的，Toeplitz 算子 T_φ 是自伴的，这是前段的一个不足道的推论；的确 $T_\varphi = T_\varphi^*$ 当且只当 $\varphi=\varphi^*$，还成立着：T_φ 是正的当且只当 φ 是正的．的确，由于当 $f \in \mathbf{H}^2$ 时恒有 $(T_\varphi f, f) = (L_\varphi f, f)$，得知 T_φ 是正的当且只当对 $\mathbf{H}^2$ 中一切 f 有 $(L_\varphi f, f) \geqslant 0$．后面的条件等价于这个条件：对一切 $f \in \mathbf{H}^2$，$(W^n L_\varphi f, W^n f) \geqslant 0$（而 n 是任意整数）．由于 W 与 L_φ 可交换，这条件又可以如下表述：对一切 $f \in \mathbf{H}^2$ 有 $(L_\varphi W^n f, W^n f) \geqslant 0$．由于 $W^n f$ 全体的集，其中 f 在 $\mathbf{H}^2$ 中，在 $\mathbf{L}^2$ 中稠密，该条件又等价于 $L_\varphi \geqslant 0$，从而等价于 $\varphi \geqslant 0$．

关于 Toeplitz 算子的乘法性质的最容易的陈述是否定的陈述：Toeplitz 算子全体的集一定不是可交换的而且在乘法下一定不是封闭的．单侧移位及其伴随算子给出这两断语的共同反例．U 和 U^* 都是 Toeplitz 算子，但乘积 U^*U（它等于 Toeplitz 算子 1）与乘积 UU^*（它不是 Toeplitz 算子）不相同．证明 UU^* 不是 Toeplitz 算子的一个方法是利用问题 194 的系 1：由于 $U^*(UU^*)U = (U^*U)(U^*U) = 1 (\neq UU^*)$，一切得到解决．另一方法，直接查看 UU^* 的矩阵，通过问题 194，（读者）可能已经得到这个否定结果了．

什么时候两个 Toeplitz 算子的积还是一个 Toeplitz 算子？答案是：很罕见．参考文献：Brown-Halmos[1963]．

问题 195．两个 Toeplitz 算子的乘积 $T_\varphi T_\psi$ 是一个 Toeplitz 算子的充分必要条件是 φ^* 或 ψ 中至少有一个是解析的；如果这

条件被满足，则 $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.

当 φ 是共轭解析的时候，φ 诱导的 Toeplitz 算子 T_φ 叫做共轭解析的(参看问题 26)．用这种语言表述，问题 195 说的就是两个 Toeplitz 算子的乘积是一个 Toeplitz 算子当且只当第一因子是共轭解析或第二因子是解析的．

系． 两个 Toeplitz 算子的乘积是 0 的充要条件是至少有一个因子是 0.

简洁地说：在 Toeplitz 算子中没有零因子．

196．Toeplitz 算子的谱包含定理． 关于 Toeplitz 算子的范数和谱的问题，比起 Laurent 算子来是相当困难的．例如说到 T_φ 的范数，一看就认为显然的只有 $\|T_\varphi\| \leqslant \|L_\varphi\|$ $(=\|\varphi\|_\infty)$，因为 T 是 L 的一个压缩而觉得显然的就是如此．关于 T 的谱没有什么是显然的，但是有一个相对地容易的不等式(属于 Hartman 和 Wintner[1950])，它答复了一些自然的问题．

问题 196． 如果 L 和 T 是由同一个有界可测函数诱导的 Laurent 和 Toeplitz 算子，则 $\Pi(L) \subset \Pi(T)$.

这是一个谱包含定理，形式上类似于问题 157；在这里，“大”算子同样有小的谱．这个结果引起我们从根本上解决问题的希望．如果 T_φ 下有界，于是 $0 \notin \Pi(T_\varphi)$，则据问题 196，$0 \notin \Pi(L)$．这等价于 L_φ 下有界，从而等价于 φ 是距 0 有界的．如果逆命题是真的，则从 φ 推断 T_φ 的谱结构将比事实所表现的更容易得多；不幸的是逆命题是谬误的．其实，如果 $\varphi = e_{-1}$，则 φ 距 0 有界，但 $T_\varphi e_0 = Pe_{-1} = 0$，因此 T_φ 有一个非平凡核．

虽然 Toeplitz 算子的谱性质是相对不好的，但问题 196 可以用来指明在某些方面 Toeplitz 算子有着正规算子的性态．这里有一些这方面的例子．

系 1． 如果 φ 是一个有界可测函数，则 $r(T_\varphi) = \|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

系 1 说明了一些东西，其中一点是对应 $\varphi \to T_\varphi$ 是保范的；从此重新得到该对应是一对一的(参看问题 194)．

系 2． 0 之外没有其他拟幂零的 Toeplitz 算子．

系 3. 每一个具有实谱的 Toeplitz 算子是自伴算子.

系 4. Toeplitz 算子的数值值域的闭包是它的谱的凸包.

197. 解析 Toeplitz 算子. Toeplitz 算子中最容易的是解析的,但即使对于它们,也比对于乘法算子,需要更谨慎地处理.有作用的词是"解析". 请记起与 $\mathbf{H}^\infty$ 中每一个 φ 相联系,有一个在开单位圆域 D 中解析的函数 $\tilde{\varphi}$(参看问题 28). T_φ 的谱性质与其说是受 φ 的单纯集论性质的影响,不如说是受 $\tilde{\varphi}$ 的复解析性质的影响. 参考文献: Wintner[1929].

问题 197. 如果 $\varphi\in\mathbf{H}^\infty$, 则 T_φ 的谱是开单位圆域 D 在 $\widetilde{H}^\infty$ 中对应元素 $\tilde{\varphi}$ 下的象的闭包; 换句话说, $\Lambda(T_\varphi)=\overline{\tilde{\varphi}(D)}$.

这个结果还可以用另外一个方法来表述. 如果 $\varphi\in\mathbf{L}^\infty$, 则 L_φ 的谱是 φ 的本性值域; 如果 $\varphi\in\mathbf{H}^\infty$, 则 T_φ 的谱就是那可以叫做 $\tilde{\varphi}$ 的本性值域的点集.

198. 自伴 Toeplitz 算子的特征值. 解析 Toeplitz 算子能有特征值吗?除倍乘算子这个不足道的情形外,答案是"否". 理由是, 如果 φ 是解析的,且对 $\mathbf{H}^2$ 中某一 f 有 $\varphi\cdot f=\lambda f$, 则 F 和 M. Riesz 定理(问题 127)蕴涵非 $\varphi=\lambda$, 即 $f=0$. 粗略地说, 理由是, 一个解析函数如不等于常数就不能在一个正测度集上取常数值. 对于自伴 Toeplitz 算子这个推理不适用: 一个非常数的实值函数没有什么理由不能在一个正测度集上取常数值.

问题 198. 给定 $\mathbf{L}^\infty$ 中一个实值函数 φ, 试确定自伴 Toeplitz 算子 T_φ 的点谱.

199. 自伴 Toeplitz 算子的谱.

问题 199. 给定 $\mathbf{L}^\infty$ 中一个实值函数 φ, 试确定自伴 Toeplitz 算子 T_φ 的谱.

关于 Toeplitz 算子的谱的更近期和更一般的研究, 参看 Widom[1960], [1964].

提 示

第一章 矢量与空间

问题 1. 极化.

问题 2. 利用唯一性：如果 $f=\sum_j \alpha_j e_j$，则 $\xi(f)=\sum_j \alpha_j \xi(e_j)$.

问题 3. 利用内积把问题约化成单位圆域的严格凸性.

问题 4. 考虑 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 中的特征函数. 供已学过谱测度者选用的提示：试从谱测度揣摩.

问题 5. 一可列无穷集有不可列个这样的无穷子集，其中任两个相异子集的交是有限集.

问题 6. 确定张成空间的正交补.

问题 7. 如果对一切 i 有 $f_0 \perp f_i$ 又如果 $\sum_{i>n}\|e_i-f_i\|^2<1$，则 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 线性相关.

问题 8. 证明 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 完备. 无损于普遍性，可假定 $\dim \mathbf{M}=1$.

问题 9. 在一无限维空间中恒存在两个子空间，其矢量和与其张成空间不同.

问题 10. (对任一就范正交基说)直径 $\sqrt{2}$ 的开球可容纳多少基元素?

问题 11. 已给一个(至多)可列基，可利用有理系数. 已给

一个可列稠子集，对(任一就范正交基的)每一基元，有这个稠子集的一个元素与它足够靠近，这个元素因而与其它基元远离.

问题 12. 任一给定的正半径球中可装入无穷多个等半径的球.

第二章 弱 拓 扑

问题 13. 考虑就范正交集. 注意：弱闭包和弱序列闭包是否相同？

问题 14. 展开 $\|f_n-f\|^2$.

问题 15. 弱稠集张成全空间.

问题 16. 假定对一切单位矢量 g 有 $|(f_n, g)|<\varepsilon$, 再以 $f_n/\|f_n\|$ 代 g.

问题 17. 考虑 H 上使得对所有 f 有 $|\xi(f)|\leqslant\|f\|$ 的复值函数 ξ 全体的集，赋予乘积拓扑，并证明范数小于或等于 1 的线性泛函形成一个闭集.

问题 18. 给定一个可数稠子集，这样定义它的每一元素的所有可能的基弱邻域：用它本身的有限子集作为邻域的矢量参量而用正整数的倒数作为数量参量；证明所得邻域全体是弱拓扑的一个基. 另一方法，给定一个就范正交基 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$, 由下式定义距离

$$d(f, g)=\sum_j \frac{1}{2^j}|(f-g, e_j)|.$$

问题 19. 如果单位球是弱可距离化的，那末它是弱可分的.

问题 20. 如果结论是谬误的，则可归纳地构造一个就范正交序列，使得其每一项与所给的弱有界集中一个适当的元的内积取很大的值；然后构成这个就范正交序列的项的一个适当的(无限)线性组合.

问题 21. 构造一个序列使它有一个弱聚点，但其各项范数趋于 ∞.

问题 22. 考虑部分和并应用一致有界原理.

问题 23. (a) 给定无界线性泛函 ξ, 应用 Hamel 基构造一个哥西有向集 $\{g_J\}$, 使得对每一 f, 有 $(f, g_J)\to\xi(f)$. (b) 如果 $\{g_n\}$ 是弱哥西序列, 则 $\xi(f)=\lim\limits_n(f, g_n)$ 定义一个有界线性泛函.

第三章 解析函数

问题 24. 解析函数在一个圆域的中心的值等于它在圆域上的平均值. 这蕴涵, ($\mathbf{A}^2(D)$中各函数)在 D 中一点的值是 $\mathbf{A}^2(D)$ 上一个有界线性泛函, 所以依范数拓扑的哥西序列是在紧集上一致收敛意义下的哥西序列.

问题 25. 适用于幂级数的收敛性与适用于富里叶级数的收敛性之间有何联系?

问题 26. 共轭对应是否连续?

问题 27. (两个富里叶级数的和函数的) 积的富里叶级数是否同于(该两个)级数的形式乘积?

问题 28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ 的一个充要条件是数集

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2 r^{2n} \quad (0<r<1)$$

是有界的. 利用 $r=1$ 时部分和的连续性.

问题 29. 从一个合适的函数希耳伯特空间出发, 添一个点给其定义域.

问题 30. 应用把核函数表示成级数的一般表示式计算 Bergman 及 Szegö 核.

问题 31. 应用 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数.

问题 32. 利用 $\tilde{f}$ 在扩张着的同心圆上的值依范数逼近 f.

问题 33. 应用极大模原理和关于富里叶级数的 Cesaro 收敛性的 Fejér 定理.

问题 34. 假定一个因子是有界的并应用问题 27.

问题 35. 已给 $\mathbf{H}^2$ 的一个元素的富里叶展开式, 首先求它的实部的富里叶展开式, 然后试将此演算过程反转过来.

第四章 无穷矩阵

问题 **36**. 只须处理维数 $\aleph_0$ 的情形. 归纳地构造所期望的就范正交集;为了保证它能形成一个基,可在选定它的每一元素后再选一元素使此元素及以前已选诸元素张成的子空间依次包含一个预先设定的基的各项.

问题 **37**. 将 $\sum_j \alpha_{ij}\xi_j$ 写成

$$\sum_j (\sqrt{\alpha_{ij}}\sqrt{p_j})\left(\frac{\sqrt{\alpha_{ij}}\,\xi_j}{\sqrt{p_j}}\right),$$

并应用 Schwarz 不等式.

问题 **38**. 应用问题 37, 设 $p_i = 1\Big/\sqrt{i+\frac{1}{2}}$.

第五章 有界性与可逆性

问题 **39**. 要得到无界的例, 可扩张一个就范正交基成一个 Hamel 基;有界的例可用一个具有(元素值较)大但(元素数目)有限的第一行的矩阵.

问题 **40**. 两次应用关于线性泛函的一致有界性原理.

问题 **41**. 为证 A^* 下有界,可证 $\mathbf{H}$ 的单位球在 A^* 下的原象是有界的.

问题 **42**. 把所给的线性变换表示成(关于 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 的就范正交基的)矩阵;如果 $\aleph_0 \leqslant \dim \mathbf{K} < \dim \mathbf{H}$, 则必有一行仅含 0 元素.

问题 **43**. 用问题 42.

问题 **44**. 应用问题 41 于把图象投影成定义域的映射.

问题 **45**. 试探究无界对角矩阵以求反例. 应用闭图象定理以得到证明.

第六章 乘法算子

问题 **46**. $|\alpha_j| = \|Ae_j\|$ 且

$$\sum_j |\alpha_j\xi_j|^2 \leqslant (\sup_j|\alpha_j|)^2 \cdot \sum_j |\xi_j|^2.$$

问题 47. 如果 $|\alpha_n| \geqslant n$, 则序列$\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$属于 l^2.

问题 48. 逆算子必将 e_n 映成$(1/\alpha_n)e_n$.

问题 49. 如果 $\varepsilon>0$, 又若 f 是一个正有限测度集的特征函数,在此集上 $|\varphi(x)|>\|\varphi\|_\infty-\varepsilon$, 则 $\|Af\|\geqslant(\|\phi\|_\infty-\varepsilon)\cdot\|f\|$.

问题 50. 如果 $\|A\|=1$, 则$\|\varphi^n\cdot f\|\leqslant\|f\|$ 对每一正整数 n 和每一 $\mathbf{L}^2$ 中的 f 成立; 这蕴涵每当 $f(x)\neq 0$ 时有 $|\phi(x)|\leqslant 1$.

问题 51. 模仿离散的情形 (解 47), 或证明乘法必须是闭的并应用闭图象定理.

问题 52. 模仿离散的情形(解 48).

问题 53. 对乘法的有界性, 可用闭图象定理. 对乘子的有界性,假定如果 $x\in X$, 则有一个 $\mathbf{H}$ 中的 f 使得 $f(x)\neq 0$; 模仿解 50 中的"巧妙"的证明.

问题 54. 考虑[0, 1]上导函数属于 $\mathbf{L}^2$ 的绝对连续函数全体的集.

第七章　算 子 矩 阵

问题 55. 如果 $AD-BC$ 是可逆的,则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的形式逆可以仿照 2×2 数值矩阵构成之. 如果

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

是可逆的, 则 $AD-BC$ 是下有界的; 模仿解两个二未知数线性方程的初等步骤.

问题 56. 从右边乘以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix},$$

选择 T 使乘积的左下角元素为0. 试寻求利用 l^2 上由

$$\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\to\langle 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$$

定义的算子及其伴随算子构成的反例.

问题 57. 如果一个有限维子空间在一个可逆算子下是不变的,则在其逆算子下也是不变的.

第八章 谱的性质

问题 58. 一个算子的核是它的伴随算子的值域的正交补.

问题 59. 为证明 $\Pi_0(p(A))\subset p(\Pi_0(A))$, 可对给定的 $\Pi_0(p(A))$ 中的 α, 因子分解 $p(\lambda)-\alpha$. 用同样技巧于 Π. 对于 Γ, 以 A^* 代换 A 并应用以上结果.

问题 60. 对 Π 说: 如果 $\|f_n\|=1$, 则诸数 $\|P^{-1}f_n\|$ 在下方以 $1/\|P\|$ 为界. 对 Γ 说: $P^{-1}AP$ 的值域包含于 A 的值域在 P^{-1} 下的象.

问题 61. 姑且先设把 $(1-AB)^{-1}$ 展开成几何级数是合理的.

问题 62. 证明余集是开的.

问题 63. 假设 $\lambda_n\notin\Lambda(A)$, $\lambda\in\Lambda(A)$ 且 $\lambda_n\to\lambda$. 如果 $f\neq 0$ 且 $f\perp\operatorname{ran}(A-\lambda)$, 则

$$\frac{(A-\lambda)(A-\lambda_n)^{-1}f}{\|(A-\lambda_n)^{-1}f\|}\to 0.$$

第九章 谱 的 例

问题 64. 如果 A 是正规的, 则 $\Pi_0(A)=(\Pi_0(A^*))^*$.

问题 65. 利用问题 64.

问题 66. 如果 $\varphi\cdot f=\lambda f$ 几乎处处成立, 则当 $f\neq 0$ 时, 恒有 $\varphi=\lambda$.

问题 67. 验证 $U^*\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle$. 计算: $\Pi_0(U)$ 是空集且 $\Pi_0(U^*)$ 是开单位圆域. 如果 $|\lambda|<1$, 则 $U-\lambda$ 下有界.

问题 68. 把 W 表示成一个乘法.

问题 69. 利用一个 A^* 的特征矢的集作为定义域，使此（特征矢）集会张成全空间；对该定义域中的每一 f，定义乘子的值为（与 f）对应的特征值的共轭数.

问题 70. 对一个具有平凡核的算子说，相对可逆性同于左可逆性；对一切算子说，左可逆性同于下有界.

问题 71. 考虑算子矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & U \end{pmatrix},$$

其中 U 是单侧移位.

第十章 谱 半 径

问题 72. 如果 λ_0 不属于 A 的谱，又若 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小，则

$$\rho_A(\lambda)=(A-\lambda_0)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}((A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0))^n.$$

问题 73. 对豫解式应用关于有界整函数的 Liouville 定理.

问题 74. 记

$$\tau(\lambda)=\left(A-\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}.$$

利用豫解式的解析性以得到结论：对 $|\lambda|<1/r(A)$，τ 是解析的，然后利用一致有界性原理.

问题 75. 寻找一个对角算子 D 使得 $AD=DB$.

问题 76. 如果 $A=S^{-1}BS$，则 S 的矩阵必定是下三角的；求矩阵的第 $n+1$ 行第 n 列的元素，$n=0, 1, 2, \cdots$.

问题 77. 求范数：S 是一个等距算子，因此 $\|S\|=\|SP\|$. 求谱半径：应用问题 74.

问题 78. 模仿不加权单侧移位所用的坐标技巧.

问题 79. 如果 $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\in l^2(p)$，记

$$Uf=\langle\sqrt{p_0}\,\xi_0, \sqrt{p_1}\,\xi_1, \sqrt{p_2}\,\xi_2, \cdots\rangle,$$

并证明 U 是自 $l^2(p)$ 到 l^2 上的这样一个等距算子：它把 $l^2(p)$ 上的移位变换成 l^2 上的一个加权移位.

问题 80. 尝试单侧加权移位，应用解 77.

问题 81. 尝试具有无穷多零权数的单侧加权移位，应用解 77.

问题 82. 用归纳法证明不等式 $|(ABf, f)|^{2^n} \leqslant (AB^{2^n}f, f) \cdot (Af, f)^{2^n-1}$.

第十一章　范数拓扑

问题 83. 想一想 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 上的投影.

问题 84. 如果 A_0 可逆，则 $1 - AA_0^{-1} = (A_0 - A)A_0^{-1}$；使用几何级数技巧证明 A 是可逆的，并得到 $\|A^{-1}\|$ 的一个上界.

问题 85. 求 A_k 和 A_k^{-1} 两算子的谱半径.

问题 86. 从 $A-\lambda$ 到奇异算子集的距离在 $\Lambda(A)$ 的余集上是正的．另一方法，豫解式的范数在 Λ_0 的余集上有界；可取一个上界的倒数作为适当的 ε.

问题 87. 用一列加权移位逼近一个具有正的谱半径的加权单侧移位，并使前者都具有足够多的零权数因而是幂零的.

第十二章　强和弱拓扑

问题 88. 使用问题 16 的结果和方法.

问题 89. 关于强拓扑的反例，可考虑投影到一个子空间的降序列上的投影序列.

问题 90. 关于强拓扑的反例，可考虑单侧移位的伴随算子的幂.

问题 91. 具有指数 2 的幂零算子全体的集是强稠密的.

问题 92. 使用网.

问题 93. (a) 使用一致有界性原理．(b) 探究单侧移位的幂.

问题 94. 如果 $\{A_n\}$ 增加且弱收敛于 A，则 $A - A_n$ 的正平方根强收敛于 0．关于一致拓扑的反例，可考虑投影的序列.

问题 95. 诸 B_n 形成一个有界增序列.

问题 96. 研究 EFE 的幂的序列.

第十三章　部分等距变换

问题 97. 如果 N 是 $F(\lambda)$ 的邻域, 则 $F^{-1}(N)$ 是 λ 的邻域, 如果 $\lambda \notin F(\Lambda(A))$, 则 λ 的某邻域与 $F(\Lambda(A))$ 不交.

问题 98. 如果 U 是具有始空间 $\mathbf{M}$ 的部分等距变换, 算出 $f \in \mathbf{M}$ 和 $f \perp \mathbf{M}$ 时 (U^*Uf, f) 的值; 如果 U^*U 是具有值域 $\mathbf{M}$ 的投影, 同样进行计算.

问题 99. 只要求得一个共轭等距算子 U 和一个非约化子空间 $\mathbf{M}$ 使得 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$ 就好了; 为此, 可设 U 是单侧移位的伴随算子, 并设 $\mathbf{M}$ 是属于某一非 0 特征值的(一维)特征子空间.

问题 100. 关于闭性: A 是部分等距算子当且只当 $A=AA^*A$. 关于连通性: 如果 U 是部分等距算子, V 是等距算子, 又 $\|U-V\|<1$, 则 U 是一个等距算子.

问题 101. 关于秩: U 在 V 的始空间上的限制是一对一的. 关于零秩: 如果 $f \in \ker V$ 且 $f \perp \ker U$, 则

$$\|Uf-Vf\|=\|f\|.$$

问题 102. 寻求一个使两算子的始空间相匹配的酉算子, 再求一个使两终空间相匹配的酉算子, 然后寻求两条连续曲线把它们分别连结到恒等算子.

问题 103. 如果 A 和 B 是可逆压缩算子, 且有一个酉算子把 $M(A)$ 变换成 $M(B)$, 则该算子把形如 $\langle f, 0\rangle$ 的矢量全体组成的子空间映成其自身.

问题 104. 如果闭单位圆域的紧子集 Λ 含有 0, 可求一个以 Λ 为谱的压缩算子 A, 并扩张 A 成为一个部分等距算子.

问题 105. 置 $P^2=A^*A$, 这样定义 U: 在 $\operatorname{ran} P$ 上, $UPf=Af$; 在 $\ker P$ 上, $Uf=0$.

问题 106. 每一个部分等距变换可扩大成极大(部分等距变换).

问题 107. 要证明极大部分等距算子是端点, 可应用问题 3.

要证明其逆定理，可应用问题 106 证明每一压缩算子是两个极大部分等距算子的平均值.

问题 108. 如果 UP 与 P^2 可交换，则也与 P 可交换，因此 $UP-PU$ 在 $\operatorname{ran} P$ 上为零.

问题 109. 关于肯定的结果，可应用问题 106，关于否定的结果：具有单侧逆的不可逆算子不可能是可逆算子的极限.

问题 110. 考虑极分解 UP，把 U 和 P 两者都联结到 1.

第十四章 单 侧 移 位

问题 111. 假定 $\mathbf{H}$ 是可分的，论证：只须证明存在着两个互相正交的无穷维约化子空间. 要证明这一点可考虑谱测度.

问题 112. 应用问题 111，分解所给酉算子成两个算子的积，其中之一使所得双向子空间序列向前推移，另一个则使其向后推移.

问题 113. (a) 如果正规算子有一个单侧逆算子，则必可逆. (b) 由于单侧移位有近似特征值 1，其实部也是如此. (c) 可逆算子与单侧移位的距离不可能小于 1.

问题 114. 如果 $V^2=U^*$，则 $\dim\ker V\leqslant 1$ 且 V 把基础希耳伯特空间映到其自身上.

问题 115. 如果 W 与算子 A 可交换，且 ψ 是单位圆上的有界可测函数，则据 Fuglede 可交换性定理，$\psi(W)$ 与 A 可交换. 置 $Ae_0=\varphi$，证明 $A\psi=\varphi\cdot\psi$，然后应用解 50 的技巧.

问题 116. 同解 115 一样地着手证明；利用解 50；模仿解 51.

问题 117. $\mathbf{H}^\infty$ 中每一个函数是一个多项式的有界序列的几乎处处极限；参看解 33.

问题 118. 如果 V 是 $\mathbf{H}$ 上的等距算子，又 $\mathbf{N}$ 是 V 的值域的正交补，则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{H}=\bigcap_{n=0}^{\infty}(V^n\mathbf{N})^{\perp}$.

问题 119. 应用问题 118，记住 -1 属于单侧移位的谱.

问题 120. 考虑单侧移位与无穷多个双侧移位的直接和.

问题 121. 如果 $\|A\|<1$ 且 $A^n \to 0$ (强), 记 $T=\sqrt{1-A^*A}$ 且对每一矢量 f 指定对应序列

$$\langle Tf,\ TAf,\ TA^2f,\ \cdots\rangle.$$

问题 122. 如果 $r(A)<1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|^2 z^n$ 在 $z=1$ 收敛, 因此 $\|f\|_0^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n f\|^2$ 定义一个等价范数.

问题 123. 记 $\mathbf{N}=\mathbf{M}\cap(U\mathbf{M})^{\perp}$, 应用解 118 的结果. 要证明 $\dim\mathbf{N}=1$, 可假定在 $\mathbf{N}$ 中存在两个互相正交的单位矢量 f 和 g, 应用 Parseval 方程计算 $\|f\|^2+\|g\|^2$. 把 U 看做双侧移位的限制是有益的.

问题 124. 证明 $\mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda)$ 在 U^* 下不变.

问题 125. 利用问题 123, 用游动子空间 $\mathbf{N}$ 表示 $\mathbf{M}$, 并检查 $\mathbf{N}$ 中单位矢的富里叶展开式.

问题 126. 关于简单移位, 考虑一个使得

$$\lim_k \frac{1}{|\xi_k|^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{n+k}|^2=0$$

的矢量 $\langle\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\rangle$. 关于多重移位, 构成以这个序列 $\{\xi_n\}$ 的子序列为分量的矢量.

问题 127. 给定 $\mathbf{H}^2$ 中的 f, 令 $\mathbf{M}$ 表示 $\mathbf{H}^2$ 的含有 f 且在 U 下不变的最小子空间, 应用问题 125 于 $\mathbf{M}$.

问题 128. 令 g 表示 $\mathbf{L}^2$ 中一个非零元, 它在一个正测度集上取值 0, 设 $f(z)=zg(z^3)$.

问题 129. 必要性: 考虑一个与 A 可交换(从而与 A^* 和 A^*A 也可交换)的自伴算子, 检查其矩阵. 充分性: 假定 $\{\alpha_n\}$ 是具有周期 p 的周期序列; 令 $\mathbf{M}_j$ 表示适合 $n\equiv j(\mathrm{mod}\,p)$ 的诸 e_n 的张成空间; 注意每一矢量 f 各有唯一的形如 $f_0+\cdots+f_{p-1}$ 的表示式, 其中 f_j 属于 $\mathbf{M}_j$; 对于单位圆上每一可测子集 E, 考虑使得 $f_j(z)=0$ 对一切 j 和 E 的余集中的一切 z 成立的 f 全体的集.

第十五章　紧　算　子

问题 130.　利用网. 在$(w\to s)$连续性的讨论中,请记起一个基弱邻域依赖于矢量的一个有限集，并考虑这些矢量的张成空间的正交补.

问题 131.　证明自共轭性时,利用极分解.

问题 132.　用有限秩的对角算子来逼近.

问题 133.　如果紧算子在一个不变子空间上的限制是可逆的,则该子空间必有限维. 利用谱定理,推断一个正规紧算子的谱在以原点为心的闭圆域外面的部分由有限个特征值组成，这些特征值都各具有有限的重数.

问题 134.　如果恒等算子有核 K，则当 F 和 G 是可测集时,恒有

$$\mu(F\cap G)=\iint\limits_{F\times G}K(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y);$$

由此得知 K 的不定积分集中在对角线上.

问题 135.　用简单函数逼近.

问题 136.　如果 A 是 Hilbert-Schmidt 算子，则 A^*A 的特征值的和是有限的.

问题 137.　利用极分解和问题 133.

问题 138.　每一个一秩算子属于每一个非零理想. 每一个非紧自伴算子在某些无穷维不变子空间上是下有界的；它在这样的子空间上的限制是可逆的.

问题 139.　利用谱定理.

问题 140.　(1) 如果 $\operatorname{ran}(1-C)=\mathbf{H}$，则 $\ker(1-C)=\{0\}$，(序列 $\{\ker A,\ \ker A^2,\ \ker A^3,\cdots\}$ 严格上升)(2) $1-C$ 在$(\ker(1-C))^\perp$ 上下有界. 在证明了(1)和(2)后，不仅把它们应用到 C,也应用到 C^*.

问题 141.　如果 $\mathbf{M}$ 是包含在 $\operatorname{ran}A$ 中的一个子空间，A 在 $\mathbf{M}$ 的原象上的限制是可逆的.

问题 142.　从(1)到(2)：A 在$(\ker A)^{\perp}$ 上的限制是可逆的.从(3)到(1)：如果 $1-BA$ 是紧的，应用解 140 于 $1-BA$.

问题 143.　假定 $\lambda=0$；注意如果 B 是可逆的，则 $A=B(1+B^{-1}(A-B))$.

问题 144.　用一个一秩算子摄动双侧移位.

问题 145.　如果 C 是紧的而 $U+C$ 是正规的，则 $U+C$ 的谱很大；但$(U+C)^*(U+C)$的谱却很小.

问题 146.　如果 A 是一个 Volterra 算子，其核以 C 为界，则 A^n 是一个 Volterra 算子，其核以 $C^n/(n-1)!$ 为界.

问题 147.　首先证明如果 A 是一个 Volterra 算子，又 ε 是一个正数，则必存在 Volterra 算子 B 和 C，以及一个正整数 k 使得(1) $A=B+C$，(2) $\|B\|<\varepsilon$，且(3) 若干个 B 和若干 C 的乘积，其中等于 C 的因子有 k 或更多个，必等于 0. 要得到 B 的核，可修改 A 的核的定义，使在平行于对角线的一条狭窄的带状区域的外部等于 0.

问题 148.　把 V^*V 表示成积分算子，用微分法把方程 $V^*Vf=\lambda f$ 转换成微分方程，然后解它.

问题 149.　把 $\mathbf{L}^2(-1,+1)$ 与 $\mathbf{L}^2(0,1)\oplus\mathbf{L}^2(0,1)$ 等同起来，确定与这样的等同映射相应的 V_0 的二乘二算子矩阵. 注意：完成此等同映射的有趣方法不限于一种.

问题 150.　置 $A=(1+V)^{-1}$，这里的 V 是 Volterra 积分算子.

问题 151.　约化成 $\mathbf{M}$ 含有一个具有无穷多个非零富里叶系数的矢量 f 的情形；在这情形下，证明存在数量 λ_n 使得 $\lambda_n A^n f\to e_0$，因此 $\mathbf{M}$ 含有 e_0，用归纳法推出结论：对每一个正整数 k，$\mathbf{M}$ 含有 e_k.

第十六章　次正规算子

问题 152.　应用 Fuglede 定理于用 A_1，A_2，B 构成的二乘二算子矩阵.

问题 **153**. 如果对一切 n 有 $\|A^n f\| \leqslant \|f\|$, 又

$$M_r = \{x: |\varphi(x)| \geqslant r > 1\},$$

则 $\|f\|^2 \geqslant \int_{M_r} r^{2n} |f|^2 d\mu$.

问题 **154**. 证明 $\ker A$ 约化 A 然后略去它不管. 当 $\ker A = \{0\}$, 考虑 A 的极分解, 把等距因子扩张成二乘二酉矩阵, 把正因子扩张成二乘二正矩阵, 并注意使这两个扩张可交换.

问题 **155**. 所希望的等距算子 U 必须使得如果 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 的有限子集, 则 $U(\sum_j B_1^{*j} f_j) = \sum_j B_2^{*j} f_j$.

问题 **156**. 考虑由单位圆与其圆心组成的测度空间, 它的测度要这样定义: 在圆上它是规范化的勒贝格测度而在圆心它是单位质量. 把 $\mathbf{L}^2$ 上的一个适当的乘法限制到多项式全体的集的闭包上去以构成一个次正规算子.

问题 **157**. 只须证明: 如果 A 可逆, 则 B 也可逆. 利用问题 153.

问题 **158**. $\Delta - \Lambda(A)$ 和 $\Delta \cap \Lambda(A)$ 都是开的. 利用问题 63.

问题 **159**. 在正规算子 B 下不变的每一个有限维子空间约化 B.

问题 **160**. 如果($\mathbf{H}$ 上的)A 是次正规的, 又 $f_0, \cdots, f_n$ 是 $\mathbf{H}$ 中的矢量, 则矩阵 $\langle (A^i f_j, A^j f_i) \rangle$ 是正定的, 带权数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 的加权移位是亚正规的当且只当对一切 n 有 $|\alpha_n|^2 \leqslant |\alpha_{n+1}|^2$.

问题 **161**. 利用问题 118.

问题 **162**. 如果 A 是亚正规的, 则对每一矢量 f 有

$$\|A^n f\|^2 \leqslant \|A^{n+1}\| \cdot \|A^{n-1}\| \cdot \|f\|^2.$$

问题 **163**. 如果 A 是亚正规的. 则 A 的特征矢全体的张成空间约化 A. 如果 A 又是紧的, 考虑 A 在上述张成空间的正交补上的限制, 并应用问题 140 和问题 162.

问题 **164**. 令 $\mathbf{H}$ 表示一个二维希耳伯特空间的 (双向无穷多个)摹本的直接和, 然后考虑 $\mathbf{H}$ 上的一个加算子权的移位.

问题 **165**. 如果 $C = P^{-1}UP$, P 是正的而 U 是酉算子, 则 C

是压缩算子的充要条件是 UP 是亚正规的.

第十七章 数 值 值 域

问题 166. 只须证明如果 f 和 g 是单位矢量，它们使 $(Af, f)=1$, $(Ag, g)=0$ 且 (Af, g) 是实的，则 $W(A)$ 包含整个单位区间. 考虑 $tf+(1-t)g$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 并利用连续性来论证.

问题 167. 如果 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 是 k 维希耳伯特空间，又 T 是自 $\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{N}$ 的线性变换，则存在 $\mathbf{M}$ 的就范正交基 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 和 $\mathbf{N}$ 的就范正交基 $\{g_1, \cdots, g_k\}$, 并存在正的数量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $Tf_i=\alpha_i g_i$, $i=1, \cdots, k$. 如果 P 和 Q 是 k 秩投影，把上面的陈述应用于 QP 在 P 的值域上的限制，并应用 Toeplitz-Hausdorff 定理 k 次.

问题 168. 试考虑对角算子. 试考虑单侧移位.

问题 169. 数值值域的闭包包含压缩谱（伴随算子的点谱的共轭复数）和近似点谱.

问题 170. 令 V 表示 Volterra 积分算子，考虑 $1-(1+V)^{-1}$.

问题 171. 利用谱定理，把待证的命题约化成下面的陈述：如果一个函数的值都在右半平面中，则它的关于正测度的积分的值也是如此.

问题 172. 利用问题 157, 169 和 171.

问题 173. (a) 证明逆否命题. (b) 如果 $\|A\|=1$ 且 $(Af_n, f_n)\to 1$, 则 $Af_n-f_n\to 0$.

问题 174. 记

$$M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

令 N 表示一个正规算子，其谱是圆心在 0, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭圆域，并考虑

$$\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & N\end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

问题 175. 如果 $\|A-B\|<\varepsilon$ 且 $\|f\|=1$，则 $(Af,\ f)\in W(B)+(\varepsilon)$. 令 U 表示单侧移位并考虑 U^{*n}, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

问题 176. $w(A)\leqslant 1$ 的充要条件是 $\mathrm{Re}(1-zA)^{-1}\geqslant 0$ 对开单位圆域中每一个 z 成立. 写下 $1/(1-z^n)$ 的部分分式展开式并用 zA 置换 z.

第十八章 酉 膨 胀

问题 177. (a) 假设所给希耳伯特空间是一维实欧几里得空间而膨胀空间是一个平面. 检查在这情形下断语的意义，用解析几何证明它，所得公式可启示一般情形的解. (b) 模仿(a).

问题 178. 寻找一个适用的双向无穷矩阵；利用解 177 的技巧和结果.

问题 179. 利用谱定理证明关于酉算子的断语，然后利用酉幂膨胀的存在性推断关于一切压缩算子的断语.

问题 180. 求 A 的一个酉幂膨胀.

问题 181. 如果 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中矢量的有限非零双向序列，又如果 $u_j=\sum\limits_i A_{i-j}f_i$ 而 $v_j=\sum\limits_i A_{i-j}g_i$，记 $[u,\ v]=\sum\limits_j (u_j,\ g_j)$. 利用它作为膨胀空间 $\mathbf{K}$ 的内积的定义.

第十九章 算子的换位子

问题 182. Wintner：假定 P 可逆并检查 $PQ=QP+1$ 的谱(性质)蕴涵(的结论). Wielandt：假定 $PQ-QP=1$，算出 P^nQ-QP^n. 并利用算出的结果估计它的范数.

问题 183. 考虑矢量的有界序列全体构成的巴拿哈空间，以零序列为模，并且注意到每一个有界的算子序列在这个空间上诱导出一个算子.

问题 184. 固定 P 并把 $\Delta Q=PQ-QP$ 看作 Q 的函数；确定 Δ^nQ^n.

问题 185. (a) 把幂的"导数"的公式推广到非可交换的情

形，并模仿 Wielandt 的证明．(b) 利用 Kleinecke-Shirokov 定理．

问题 186. 把空间这样地表示成一个无穷直接和，使得第一加项以后的所有加项都在核中．检查给定的算子的对应的矩阵表示，试把它表示成 $PQ-QP$，这里的 P 是(与该直接和空间)相关联的单侧移位．

问题 187. 求一个可逆算子 T 使得 $A+T^{-1}AT$ 有非零核；应用问题 186 于可数多个 $A+T^{-1}AT$ 的直接和．证明下述引理并应用它：如果 $B+C$ 是一个换位子，则 $B\oplus C$ 也是．

问题 188. 如果 $C=A^*A-AA^*\geqslant 0$，在 $\Pi(A)$ 中取一数 λ，求 $\{f_n\}$，使 $\|f_n\|=1$ 且 $(A-\lambda)f_n\to 0$，并证明 $Cf_n\to 0$．

问题 189. (a) 证明 (1) A 是拟正规的，(2) $\ker(1-A^*A)$ 约化 A，和 (3) $(\ker(1-A^*A))^\perp\subset\ker(A^*A-AA^*)$．(b) 考虑一个加权双侧移位，其一切权数非等于1即等于 $\sqrt{2}$．

问题 190. 关于充分性，尝试一个(双向)对角算子和一个双侧移位；关于必要性，将加法理论的 Wintner 推理移植过来．

问题 191. 利用问题 111，然后试用一个对角算子矩阵和一个双侧移位，模仿问题 190 中运用的技巧，但应用算子矩阵(代替算子)．

问题 192. 利用问题 111，并将问题 186 的导言部分移植到乘法(换位子)来，证明每一个可逆正规算子是两个换位子的乘积．

第二十章 Toeplitz 算子

问题 193. 必要性：计算．充分性：利用问题 115.

问题 194. 必要性：计算．充分性：对 $\mathbf{L}^2$ 中一切 f，记 $A_nf=W^{*n}APW^nf$，$n=0, 1, 2, \cdots$，并证明序列 $\{A_n\}$ 弱收敛．

问题 195. 如果 $\langle\gamma_{ij}\rangle$ 是 $T_\varphi T_\psi$ 的矩阵，则 $\gamma_{i+1,j+1}=\gamma_{ij}+\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}$，这里的 $\varphi=\sum_i \alpha_i e_i$ 且 $\psi=\sum_j \beta_j e_j$．

问题 196. 证明 $W^{*n}TPW^{n} \to L$(强)，并利用它证明：如果 $0 \in \Pi(\mathbf{L})$，则 $0 \in \Pi(T)$.

问题 197. 令 K 表示 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数，并对 D 中一个固定的 y 和 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 中一个固定的 $\tilde{f}$，记 $\tilde{g}(z)=(\tilde{\varphi}(z)-\tilde{\varphi}(y))\tilde{f}(z)$. 由于 $\tilde{g}(y)=0$，得知 $\tilde{g}\perp K_y$ 从而 $\tilde{\varphi}(y)$ 在 T_φ 的(压缩)谱中.

问题 198. 如果 φ 是实的且 $T_\varphi f=0$，则 $\varphi\cdot f^*\cdot f$ 是实的且属于 $\mathbf{H}^1$.

问题 199. 如果 φ 是实的且 T_φ 可逆，则 $\varphi\cdot f^* \in \mathbf{H}^2$，而这蕴涵 $\operatorname{sgn}\varphi$ 是常数.

解　答

第一章　矢量与空间

解 1.　二次型序列的极限也是二次型.

证. 与每一个二元函数 ϕ 相伴，有一个由式 $\phi^{-}(f)=\phi(f, f)$ 定义的一元函数 ϕ^{-}；与每一个一元函数 ψ 相伴，有一个二元函数 ψ^{+}，由下式定义：

$$\psi^{+}(f, g)=\psi\left(\frac{1}{2}(f+g)\right)-\psi\left(\frac{1}{2}(f-g)\right)$$
$$+i\psi\left(\frac{1}{2}(f+ig)\right)-i\psi\left(\frac{1}{2}(f-ig)\right).$$

如果 ϕ 是一次半型，则 $\phi=\phi^{-+}$；如果 ψ 是一个二次型，则 $\psi=\psi^{+-}$. 如果 $\{\psi_n\}$ 是一个二次型序列且 $\psi_n\to\psi$（就是说，对每一矢量 f，$\psi_n(f)\to\psi(f)$），则 $\psi_n^{+}\to\psi^{+}$ 且 $\psi_n^{+-}\to\psi^{+-}$. 由于每一 ψ_n 是一个二次型，得知每一 ψ_n^{+} 是一个一次半型，因此 ψ^{+} 也是一次半型. 由于还有 $\psi_n=\psi_n^{+-}$，得知 $\psi=\psi^{+-}$，因此 ψ 是二次型.

序列的下标集（即自然数集）在上面的论证中不起什么作用；对于任意长度的有序序列，而且更一般地，对于有任意结构的网，证明同样有效.

解 2.　为了启发解题途径，暂设对某一 g 有 $\xi(f)=(f, g)$. 任意选择一个固定的就范正交基 $\{e_j\}$ 且依此展开 g：$g=\sum_j\beta_j e_j$.

由于

$$\beta_j=(g,\ e_j)=(e_j,\ g)^*=\xi(e_j)^*.$$

矢量 g 可以由下式获得：

$$g=\sum_j \xi(e_j)^* e_j.$$

如果已知黎斯表示式的存在性，上面的推理就证明了唯一性并且展示了表示泛函的矢量的坐标；而现在是要证明存在性，从这个观点看来，主要问题在于证明级数 $\sum_j \beta_j e_j$ 的收敛性，这里，$\beta_j=\xi(e_j)^*$.

对下标集的每一有限子集 J，记 $g_J=\sum_{j\in J}\beta_j e_j$. 于是

$$\xi(g_J)=\sum_{j\in J}|\beta_j|^2,$$

因而
$$\sum_{j\in J}|\beta_j|^2\leqslant\|\xi\|\cdot\|g_J\|=\|\xi\|\cdot\sqrt{\sum_{j\in J}|\beta_j|^2}.$$

此式蕴涵
$$\sqrt{\sum_{j\in J}|\beta_j|^2}\leqslant\|\xi\|,$$

因而
$$\sum_j|\beta_j|^2<\infty.$$

这个结果证明了记法 $g=\sum_j \beta_j e_j$ 的合理性. 如果 $f=\sum_j \alpha_j e_j$，则

$$\xi(f)=\sum_j \alpha_j \xi(e_j)=\sum_j \alpha_j\beta_j^*=(f,\ g),$$

证完.

解 3. 闭单位球的界点是单位球面的矢量（就是单位矢量，即具有 $\|f\|=1$ 的矢量 f）. 所以待证的是，如果 $f=tg+(1-t)h$，其中 $0<t<1$，$\|f\|=1$，$\|g\|\leqslant1$，$\|h\|\leqslant1$，则 $f=g=h$. 从观察

$$1=(f,\ f)=(f,\ tg+(1-t)h)=t(f,\ g)+(1-t)(f,\ h)$$

开始. 由于 $|(f,\ g)|\leqslant1$ 且 $|(f,h)|\leqslant1$，得知 $(f,g)=(f,h)=1$；这一步用到闭单位圆域的严格凸性. 这个结果说明对 f 和 g 以及 f 和 h，Schwartz 不等式都退化了，而这蕴涵 g 和 h 都是 f 的常数倍. 记 $g=\alpha f$，$h=\beta f$. 由于 $1=(f,\ g)=(f,\ \alpha f)=\alpha^*$，又类似地有 $1=\beta^*$，证完.

解 4. 由于每一无穷维希耳伯特空间有一个子空间与 $\mathbf{L}^2(0,1)$ 同构，只需描述相应于这个特殊空间的构造法. 这是易于描述

的. 设$0\leqslant t\leqslant 1$, 令$f(t)$表示区间$[0, t]$的特征函数; 换言之, 按$0\leqslant s\leqslant t$或$t<s\leqslant 1$而令$(f(t))(s)=1$或0. 如果$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$, 则

$$\|f(b)-f(a)\|^2=\int|(f(b))(s)-(f(a))(s)|^2ds$$

$$=\int_a^b ds=b-a,$$

这蕴涵f是连续的, 简单性和正交性条件的验证是明显的.

关于切线的存在问题, 易见在任一点增量的比不趋于一个极限. 的确,

$$\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\|^2=\left|\frac{h}{h^2}\right|=\left|\frac{1}{h}\right|,$$

这式子十分明白地指明f是处处不可微的.

关于这个构造法, 虽然没有什么数学上的唯一性, 但说也奇怪, 根据经验, 上述的例子倒象有心理上的唯一性; 每一个试解本题的人似乎都得到同一个答案.

无穷维性在上述的特殊证明中是明显地用上了, 但这并不蕴涵它是不可缺少的. 它是否不可缺的? 检查一下有限维的情况很有启发性.

与上述类似的构造法在谱测度理论中是习见的(参看 Halmos [1951, p. 58]). 如果E是定义于$[0, 1]$的一切 Borel 子集上的谱测度, 对每一 Borel 集M, $E(M)$表示乘以M的特征函数的算子, 又如果e是取常值1的函数, 则上述曲线可由下式定义:

$$f(t)=E([0, t])e.$$

这个讨论指明了怎样去构造许多突转连续曲线的例子: 应用各种不同的谱测度并作用于不同的矢量. 不一定限于考虑以全区间为支集的连续谱测度, 但这样做却是明智的, 这些假定保证了每一非0矢量都可充当上例中e的角色.

解 5. 如果一个希耳伯特空间的正交维是无穷的, 则其线性维大于或等于$2^{\aleph_0}$.

(请记起: 如果一个希耳伯特空间的线性维或正交维中有一个为有限, 则另一也是有限, 且两者相等.)

证. 主要工具是集论中一个有着若干应用的奇妙的结论：存在一个以正整数集的无穷子集为元素的具有基数 $2^{\aleph_0}$ 的集类 $\{J_t\}$，使当 $s\neq t$ 时均有 $J_s\cap J_t$ 有限. 这里简单地介绍这种集类的构造法. 由于正整数与有理数之间有着一一对应，只须证明具有所述性质的诸有理数集的存在性；这又只须对每一实数 t，令 J_t 表示以 t 为其唯一聚点的无穷有理数集即可.

现在假设 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个可数就范正交集，又令 $f=\sum\limits_n \xi_n e_n$（富里叶展开式）是一个任意矢量，它使得对一切 n 有 $\xi_n\neq 0$. 如果 $\{J_t\}$ 是如上所述的一个正整数集类，记 $f_t=\sum\limits_{n\in J_t}\xi_n e_n$. 可断言：矢量集 $\{f_t\}$ 线性无关. 的确，设有诸 f 的一个有限线性组合为 0，譬如 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_{t_i}=0$. 由于对每一 $i\neq 1$，集 J_{t_1} 含有无穷多个不属于 J_{t_i} 的整数，得知 J_{t_1} 至少含有一个整数，如 n，不属于任一 $J_{t_i}(i\neq 1)$. 由此推知 $\alpha_1\xi_n=0$，因而由 $\xi_n\neq 0$，得 $\alpha_1=0$. 自然同理可证对每一 $i=1, \cdots, k$，有 $\alpha_i=0$.

这个结果就是在希耳伯特空间理论中线性维概念不甚重要的主要理由. 在希耳伯特空间的文献中词"维"总是指"正交维".

本问题还有更简单的解答，但前文的论证却在某种意义上具有别的解法所缺乏的初等性. 简解的例：每一个无限维希耳伯特空间可认为包含 $\mathbf{L}^2(0, 1)$，而解 4 中所展示的矢量 $f(t)$，$0<t\leqslant 1$，形成具有基数 $2^{\aleph_0}$ 的线性无关集. 另一例：每一无穷维希耳伯特空间可认为包含 l^2，而矢量

$$g(t)=\langle 1, t, t^2, \cdots\rangle,\ 0<t<1,$$

构成具有基数 $2^{\aleph_0}$ 的线性无关集.

解 6. 如果 $0<|\alpha|<1$ 且对 $k=1, 2, 3, \cdots$，$f_k=\langle 1, \alpha^k, \alpha^{2k}, \alpha^{3k}, \cdots\rangle$，则诸 f_k 张成 l^2.

证. 最快的证题途径可能是去寻求一个与所有 f_k 正交的矢量 f. 如果 $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$，则

$$0=(f, f_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\alpha^{*nk}.$$

换句话说，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n z^n$ 当 $z=\alpha^{*k}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 时都等于 0，因而它恒等于 0. 结论：对所有的 n, $\xi_n=0$, 故 $f=0$.

问题的提法带有欺骗性. 解答中幂 α^k 的算术结构不起作用，如果以任意数 α_k 代替幂 α^k(对应地，以 α_k^n 代替 α^{nk})同样证法仍旧适用，只须诸数 α_k 以单位圆域的某内点为聚点. (注意如果 $\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n z^n$ 的收敛半径大或等于 1.)

这个结果是关于 Vandermonde 矩阵的众所周知的事实的浅易推广，而且上面提出的证明也适用于有限维的情形. 如果 l_m^2 表示长度 $m(=1, 2, 3, \cdots)$ 的序列 $\langle\xi_0, \cdots, \xi_{m-1}\rangle$ 全体组成的 m 维希耳伯特空间，又如矢量 $f_k(k=1,\cdots,m)$ 由 $f_k=\langle 1, \alpha_k, \cdots, \alpha_k^{m-1}\rangle$ 定义(这里，$0\leqslant|\alpha_k|<1$ 且诸 α_k 互异)，则 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 张成 l_m^2. 的确，如果 $f=\langle\xi_0, \cdots, \xi_{m-1}\rangle$ 直交于每一 f_k, 则 $\sum_{n=0}^{m-1}\xi_n\alpha_k^{*n}=0$, 即(至多)$m-1$ 次多项式 $\sum_{n=0}^{m-1}\xi_n z^n$ 在 m 个互异的点等于 0, 因而恒等于 0.

解 7. 求证的是，如果 $f_0\perp f_i(i=1, 2, 3, \cdots)$, 则 $f_0=0$. 设 $f_0\neq 0$, 则 $\{f_0, f_1, f_2, \cdots\}$ 是非 0 矢量组成的一正交集，因此是线性无关的，下面的论证的目的就是指明这是不可能的. 这论证实质上同于 Birkhoff-Rota 用的证法，但稍简单；它是 J. T. Rosenbaum 发现的.

首先选一正数 n 使

$$\sum_{j>n}\|e_j-f_j\|^2<1;$$

下面可以看出，对这个 n 说，矢量 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 线性相关. 记

$$g_k=\sum_{j=1}^{n}(f_k, e_j)e_j, \qquad k=0, 1, \cdots, n.$$

由于每一 g_k 属于 $e_1, \cdots, e_n$ 的(n 维)张成空间，又由于 g_k 的个数是 $n+1$, 得知诸 g_k 必线性相关，例如有

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k g_k=0.$$

这蕴涵　$0=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\sum_{j=1}^{n}(f_k,\ e_j)e_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f_k,\ e_j\right)e_j.$

由于诸 e_j 线性无关，上式各端的和数中的系数一定都等于 0，换句话说，如果

$$h=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f_k,$$

则 $h\perp e_1,\ \cdots,\ e_n$. 从 h 的关于 e_j 的富里叶展开式计算其范数：

$$\|h\|^2=\sum_{j>n}|(h,\ e_j)|^2$$

(因为对 $j\leqslant n$ 有 $h\perp e_j$)

$$=\sum_{j>n}|(h,\ e_j)-(h,\ f_j)|^2$$

(因为，据定义，h 属于 $f_0,\ f_1,\ \cdots,\ f_n$ 的张成空间，因此对 $j>n$ 有 $h\perp f_j$)

$$\leqslant\sum_{j>n}\|h\|^2\cdot\|e_j-f_j\|^2.$$

n 的定义蕴涵，除非 $h=0$，最后一式必严格地小于 $\|h\|^2$. 由此知 $h=0$，即 $f_0,\ f_1,\ \cdots,f_n$ 确实线性相关.

可以从另一途径考虑这个证明，它略欠初等，但却稍省计算，且或更为明晰. 求 n 如上述，首先仅在诸 e_j 的线性组合全体上定义一个线性变换 A 如下：

$$Ae_j=e_j,\ \text{如果}\ j\leqslant n,$$

且

$$Ae_j=f_j,\ \text{如果}\ j>n.$$

如果 $f=\sum_j\xi_j e_j$ (有限项)，则

$$\|f-Af\|^2=\left\|\sum_{j>n}\xi_j(e_j-f_j)\right\|^2$$

$$\leqslant\sum_{j>n}|\xi_j|^2\cdot\sum_{j>n}\|e_j-f_j\|^2$$

$$\leqslant\|f\|^2\cdot\sum_{j>n}\|e_j-f_j\|^2.$$

由此知算子 $1-A$(在上述定义域上)有界且以

$$\sum_{j>n}\|e_j-f_j\|^2$$

为界，而此式严格小于 1. 这蕴涵 (Halmos[1951, p. 52]) A 可以

(唯一地)延拓成 $\mathbf{H}$ 上的一个可逆算子(仍可以 A 表示). A 的可逆性蕴涵矢量 $e_1, \cdots e_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \cdots$($e_1\cdots e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots$ 在 A 下的象)张成空间 $\mathbf{H}$. 由此推知, 如果 $\mathbf{M}$ 是 $f_{n+1}, f_{n+2}, \cdots$ 的张成空间, 则 $\dim \mathbf{M}^{\perp}=n$. 结论: 矢量 $f_1, \cdots, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \cdots$ 张成空间 $\mathbf{H}$.

解 8. 只须证明如果 $\dim \mathbf{M}=1$, 则 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 闭; 对维数行归纳法即得一般情形的解. 因此可设 $\mathbf{M}$ 由一个矢量 f_0 张成, 于是 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 由形如 αf_0+g 的一切矢量组成, 这里 α 是一个数量而 $g\in\mathbf{N}$. 如果 $f_0\in\mathbf{N}$, 则 $\mathbf{M}+\mathbf{N}=\mathbf{N}$, 此时没有什么需要证明的. 如果 $f_0\notin\mathbf{N}$, 令 g_0 表示 f_0 在 $\mathbf{N}$ 中的投影, 即 g_0 表示 $\mathbf{N}$ 中使 $f_0-g_0\perp\mathbf{N}$ 的唯一矢量.

现在注意如果 g 是 $\mathbf{N}$ 中一个矢量, 则

$$\|\alpha f_0+g\|=\|\alpha(f_0-g_0)+(\alpha g_0+g)\|^2\geqslant|\alpha|^2\cdot\|f_0-g_0\|^2$$

(由于 $f_0-g_0\perp\alpha g_0+g$), 或

$$|\alpha|\leqslant\frac{\|\alpha f_0+g\|}{\|f_0-g_0\|},$$

且因此有

$$\begin{aligned}\|g\|&=\|(\alpha f_0+g)-\alpha f_0\|\\&\leqslant\|\alpha f_0+g\|+\frac{\|\alpha f_0+g\|}{\|f_0-g_0\|}\cdot\|f_0\|.\end{aligned}$$

这些不等式蕴涵 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$(所有 αf_0+g 的集)是闭的. 的确, 如果 $\alpha_n f_0+g_n\to h$, 因此 $\{\alpha_n f_0+g_n\}$ 是一个哥西序列, 则以上诸不等式蕴涵 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 都是哥西序列. 由此知 $\alpha_n\to\alpha$ 且 $g_n\to g$, 而 g 自然属于 $\mathbf{N}$, 从而有 $h=\lim_n(\alpha_n f_0+g_n)=\alpha f_0+g$.

解 9. 一个希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的子空间格是模格当且只当 $\dim \mathbf{H}<\aleph_0$(即 $\mathbf{N}$ 是有限维的); 它是分配格当且只当 $\dim \mathbf{H}\leqslant1$.

证. 如果 $\mathbf{H}$ 是无穷维的, 它必有两个子空间 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 使 $\mathbf{M}\cap\mathbf{N}=\{0\}$ 而 $\mathbf{M}+\mathbf{N}\neq\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ (参看问题 41). 已知 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$, 可在 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ 中求得一个不属于 $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ 的矢量 f_0, 令 $\mathbf{L}$ 表示 $\mathbf{N}$ 和 f_0 的张成空间. 据问题 8, $\mathbf{L}$ 等于 $\mathbf{N}$ 和 f_0 张成的一维空间的矢

量和，就是说，$\mathbf{L}$ 中每一矢量具有 αf_0+g 的形式，这里，α 是一数量而 g 在 $\mathbf{N}$ 中.

$\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ 都含有 f_0，因此，其交也是如此．另一方面，$\mathbf{L}\cap\mathbf{M}=\{0\}$．理由：如果 $\alpha f_0+g\in\mathbf{M}$（其中 g 属于 $\mathbf{N}$），则 $\alpha f_0\in\mathbf{M}+\mathbf{N}$；这蕴涵 $\alpha=0$ 从而 $g=0$．结论：$(\mathbf{L}\cap\mathbf{M})\vee\mathbf{N}=\mathbf{N}$，而 $\mathbf{N}$ 不含 f_0.

前面的论证是本题证明中仅有的需要无穷维性的部分．证明的其余部分仅须简易的有限维几何学．请读者补足之．读者须坚信自己能完成这项工作，切勿中途放弃.

解 10．在一个 $n(<\aleph_0)$ 维希耳伯特空间中（闭）单位球是 $2n$ 维实欧氏空间的闭有界子集，所以闭单位球是紧的．由于平移及伸缩是同胚变换得知每个闭球是紧的；由于开球构成拓扑的一个基，得知空间是局部紧的.

反之，假设 $\mathbf{H}$ 是局部紧希耳伯特空间．前段的论证可以这样倒转过来：局部紧的假定蕴涵每一闭球是紧的，而闭单位球特别是如此．为推出有限维性，可注意两个互相正交的单位矢的距离是 $\sqrt{2}$，因此每一直径 $\sqrt{2}$（或更小）的开球至多只能含每一就范正交基中的一个基元．直径 $\sqrt{2}$ 的一切开球的类是闭单位球的一个开覆盖；闭单位球的紧性蕴涵每一就范正交基都是有限的，故知 $\mathbf{H}$ 是有限维的.

解 11．如果 $\dim\mathbf{H}\leqslant\aleph_0$，则 $\mathbf{H}$ 有一个至多可列就范正交基．由于 $\mathbf{H}$ 中每一矢量是基矢量的有限线性组合的极限，得知 $\mathbf{H}$ 中每一矢量也是其系数的实部及虚部都是有理数的这样的线性组合的极限．这样的有理系数线性组合全体的集至多可列，因此 $\mathbf{H}$ 是可分的.

反之，假设 $\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中一个至多可列稠集．如果 $\{g_j\}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基，则对每一下标 j，存在一个下标 n_j 使得 $\|f_{n_j}-g_j\|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．由于半径是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 而中心是互异的 g_j 的两个开球不相交，映射 $j\to n_j$ 是一对一的；这蕴涵下标 j 的集的基

数不大于 $\aleph_0$.

Gram-Schmidt 程序提供逆命题的另一证明途径. 由于通常描述这个程序时仅涉及线性无关序列, 可先自序列 $\{f_n\}$ 中弃去一切是其前面的项的线性组合的项. 完成这一步后, 即行 Gram-Schmidt 程序以使此序列就范正交化. 所得就范正交集一定是至多可列的; 由于其张成空间仍旧同于原序列 $\{f_n\}$ 的张成空间, 所以它是一个基.

解 12. 由于据定义, 测度应在平移下不变, 不失一般性, 可仅考虑以 0 为中心的球. 如果 $\mathbf{B}$ 是如此的一个球, 有半径 $r(>0)$; 又如 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 是空间中一个无穷就范正交集, 考虑中心在 $(r/2)e_n$ 具有半径 $r/4$ 的球 $\mathbf{B}_n$, 即 $\mathbf{B}_n=\{f: \|f-(r/2)e_n\|<r/4\}$. 如 $f\in\mathbf{B}_n$, 则

$$\|f\|\leqslant\left\|f-\frac{r}{2}e_n\right\|+\left\|\frac{r}{2}e_n\right\|<r,$$

因此 $B_n\subset B$. 如果 $f\in\mathbf{B}_n$ 而 $g\in\mathbf{B}_m$, 则

$$\left\|\frac{r}{2}e_n-\frac{r}{2}e_m\right\|\leqslant\left\|\frac{r}{2}e_n-f\right\|+\|f-g\|+\left\|g-\frac{r}{2}e_m\right\|.$$

这蕴涵: 如果 $n\neq m$, 则

$$\|f-g\|\geqslant\frac{r}{2}\sqrt{2}-\frac{r}{4}-\frac{r}{4}>0,$$

所以如果 $n\neq m$, 则 $\mathbf{B}_n$ 与 $\mathbf{B}_m$ 不相交. 由于, 据不变性, 一切 $\mathbf{B}_n$ 有相同的测度, 得知 $\mathbf{B}$ 包含无限多个不相交的具相同正测度的波雷耳集; 从而 $\mathbf{B}$ 的测度一定是无穷大.

第二章 弱 拓 扑

解 13. 如果 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{H}$ 中一个弱闭集, 又若 $\{f_n\}$ 是 $\mathbf{S}$ 中一个矢量序列使 $f_n\to f$(强), 则

$$|(f_n, g)-(f, g)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|g\|\to 0,$$

因而 $f_n\to f$ (弱), 所以 $f\in\mathbf{S}$. 这证明了弱闭集都是强闭的; 事实上, 上述证明也指明了每一集的强闭包必包含于其弱闭包中, 逆命

题的谬误性（即，强闭集不一定是弱闭的）可以从就范正交序列 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 必有 $e_n \to 0$（弱）这个奇特事例演绎出来．理由：对每一矢量 f，诸内积 (f, e_n) 是 f 的富里叶系数，因此它们也是一个绝对平方收敛级数的项．由此得知 e_n 全体的集在弱拓扑中不是闭的；在强拓扑中它是离散的因而是闭的．处理逆命题的另一方法是提出一个强开但非弱开的集；开单位球就是这样的一个集．为了证明，其实只须注意到，在一个无穷维空间中弱开集都是无界的．

尚待证明的是子空间是弱闭的．如果 $\{f_n\}$ 是子空间 $\mathbf{M}$ 中的序列，又若 $f_n \to f$（弱），则据定义，对每一 g 有 $(f_n, g) \to (f, g)$．由于每一 f_n 与 $\mathbf{M}^\perp$ 直交，得知 $f \perp \mathbf{M}^\perp$，从而 $f \in \mathbf{M}$．这个论证指明了 $\mathbf{M}$ 包含 $\mathbf{M}$ 中一切弱收敛序列的（弱）极限，但这还不足以证实 $\mathbf{M}$ 是弱闭的结论的正确性．在这本书中，到此为止并不知道弱拓扑是可距离化的，因而序列闭包可能有异于闭包．这也易于补救；只须观察到上文中用到序列的论证只须以词“网”代替“序列”便照样行得通，一个记号都不须改动，而网闭包则恒与闭包相同．

解 14． 证明依据一个熟悉而显易的计算：

$$\|f_n - f\|^2 = (f_n - f, f_n - f)$$
$$= \|f_n\|^2 - (f, f_n) - (f_n, f) + \|f\|^2.$$

由于 $f_n \to f$（弱），带负号的项趋于 $\|f\|^2$，又由假定，第一项也是如此．结论：如所断言，$\|f_n - f\|^2 \to 0$．

解 15． *每一弱可分希耳伯特空间是可分的．*

证．可列集张成的空间恒为（强）可分空间；所以只须证明，如果一个可列集 $\mathbf{S}$ 在希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 中弱稠密，则 $\mathbf{S}$ 的张成空间等于 $\mathbf{H}$．只要观察的方向对头，这也是显然的．按定义，$\mathbf{S}$ 的张成空间是一个（强闭）子空间，从而，据问题 13，它是弱闭的，同时它又是在 $\mathbf{H}$ 中弱稠密的，所以它必等于 $\mathbf{H}$．

注意：不涉及序列的论证不仅较精巧也较为稳妥．f 如在 $\mathbf{S}$ 的弱闭包中，则必为 $\mathbf{S}$ 中某序列的极限，这种说法并不是先验地明显的．

解 16. 只须讨论 $f=0$ 的情况. 如果 $\|f_n\|\to 0$, 则由于当 $\|g\|=1$ 恒有 $|(f_n, g)|\leqslant\|f_n\|\cdot\|g\|=\|f_n\|$, 得知, 如所述, $(f_n, g)\to 0$(一致).

反之, 假设对每一正数 ε, 如果 n 充分大, 便有

$$|(f_n, g)|<\varepsilon \text{ 当 } \|g\|=1;$$

一致性表现在所要求的 n 的大小不依赖于 g. 可以推知, 如果 n 充分大则

$$\text{当 } g\neq 0 \text{ 时,}\quad \left|\left(f_n, \frac{g}{\|g\|}\right)\right|<\varepsilon,$$

从而有

$$\text{对一切 } g, |(f_n, g)|\leqslant\varepsilon\|g\|.$$

所以, 特别是(置 $g=f_n$)当 n 充分大时,

$$\|f_n\|^2\leqslant\varepsilon\|f_n\|$$

或

$$\|f_n\|\leqslant\varepsilon.$$

注意上述论证具有完全的普遍性; 它适用于一切网, 不仅适用于序列.

解 17. 已给希耳伯特空间 $\mathbf{H}$, 对 $\mathbf{H}$ 中每一矢量 f, 令 $\mathbf{D}_f$ 表复平面中的闭圆域 $\{z: |z|\leqslant\|f\|\}$, 且令 $\mathbf{D}$ 表示所有 $\mathbf{D}_f$ 的笛卡儿乘积, 赋以惯用的乘积拓扑. 对单位球中每一 g, 映象 $f\to(f, g)$ 是 $\mathbf{D}$ 中一点, 可说是 $\delta(g)$. 如此定义的映象 δ 是一个从单位球(具弱拓扑)到 $\mathbf{D}$(具乘积拓扑)的同胚. 的确, 如果 $\delta(g_1)=\delta(g_2)$, 就是说, 如果对一切 f 有 $(f, g_1)=(f, g_2)$, 则显然有 $g_1=g_2$, 因此 δ 是一对一的. 关于连续性:

$$g_j\to g\text{(弱) 当且只当 } (f, g_j)\to(f, g)$$

对 $\mathbf{H}$ 中每一 f 成立, 而这又当且只当在 $\mathbf{D}$ 中 $\delta(g_j)\to\delta(g)$ 时才会满足. $\mathbf{H}$ 上线性泛函的黎斯表示定理蕴涵 δ 的值域恰由 $\mathbf{D}$($\mathbf{H}$ 上某些复值函数组成的集)中的那样的元素 ξ 组成, 这些 ξ 事实上就是 $\mathbf{H}$ 上范数小或等于 1 的线性泛函.

到此为止的论证完成了构造一个从单位球到紧 Hausdorff 空间 $\mathbf{D}$ 里的同胚 δ, 并且完成了 δ 的值域的认定. 论证的其余部分将证明这值域闭(因而紧)于 $\mathbf{D}$; 这一步完成后, 单位球的弱紧性随

即得到.

"是线性泛函"这个性质是一个具"有限特征"的性质. 这就是说: ξ 是一个线性泛函当且只当它满足这样的许多方程(有无穷多个), 这类方程的每一个都只包含 $\mathbf{H}$ 中的有限个元素; 由此可推出线性泛函全体的集在 $\mathbf{D}$ 中闭. 详细地说, 可考虑固定的数偶 α_1 和 α_2 以及矢量偶 f_1 和 f_2, 并构成 $\mathbf{D}$ 的子集 $\mathbf{E}(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2)$, 它由下式定义:

$$\mathbf{E}(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2)=\{\xi\in\mathbf{D}: \xi(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1\xi(f_1)+\alpha_2\xi(f_2)\}.$$

具有限特征性质的那个断语相当于说: $\mathbf{D}$ 中线性泛函全体的集(δ 的值域)是一切形如 $\mathbf{E}(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2)$ 的集的交. 由于乘积拓扑的定义蕴涵函数 $\xi\to\xi(f_1)$, $\xi\to\xi(f_2)$ 和 $\xi\to\xi(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)$ 中的每一个在 $\mathbf{D}$ 上连续, 得知每一个集 $\mathbf{E}(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2)$ 是闭的, 从而 δ 的值域是紧的.

上面的证明与更一般的 Tychonoff-Alaoglu 定理(巴拿哈空间的共轭空间的单位球是弱*紧的)的证明除符号外没有差异.

解 18. *在一个可分希耳伯特空间中单位球的弱拓扑是可距离化的.*

证 1. 由于单位球 $\mathbf{B}$ 是弱紧的(问题 17), 只须证明 $\mathbf{B}$ 的弱拓扑存在一个可数基底. 为此目的, 令 $\{h_j: j=1, 2, 3, \cdots\}$ 是空间中一个可数稠集, 并考虑由下式定义的($\mathbf{B}$ 中)弱基邻域:

$$\mathbf{U}(p, q, r)=\{f\in\mathbf{B}: |(f-h_p, h_j)|<\frac{1}{q}, j=1, \cdots, r\},$$

此处 $p, q, r=1, 2, 3, \cdots$. 待证: 如果 $f_0\in\mathbf{B}$, k 是一个正整数, $g_1, \cdots, g_k$ 是任意矢量, 又 ε 是一个正数, 又设

$$\mathbf{U}=\{f\in\mathbf{B}: |(f-f_0, g_i)|<\varepsilon, i=1, \cdots, k\},$$

则存在整数 p, q, r 使得

$$f_0\in\mathbf{U}(p, q, r)\subset\mathbf{U}.$$

证明以常用的不等式方法为基础:

$$
\begin{aligned}
|(f-f_0, g_i)| &\leqslant |(f-h_p, h_j)| + |(h_p-f_0, h_j)| \\
&\quad + |(f-f_0, g_i-h_j)| \\
&\leqslant |(f-h_p, h_j)| + \|h_p-f_0\|\cdot\|h_j\| \\
&\quad + \|f-f_0\|\cdot\|g_i-h_j\|.
\end{aligned}
$$

可如下论证：对每一$i(=1, \cdots, k)$选择j_i使$\|g_i-h_{j_i}\|$取小值，且选p使$\|h_p-f_0\|$很小．具体地说：选q使$\frac{1}{q}<\frac{\varepsilon}{3}$，选$j_i$使$\|g_i-h_{j_i}\|<1/2q$，选$r$使$j_i\leqslant r$对$i=1, \cdots, k$成立，而最后选$p$使$\|h_p-f_0\|<1/qm$，此处$m=\max\{\|h_j\|:j=1, \cdots, r\}$．如$j=1, \cdots, r$，则

$$\|(f_0-h_p, h_j)\|\leqslant\|f_0-h_p\|\cdot\|h_j\|<\frac{1}{qm}\cdot m=\frac{1}{q},$$

于是$f_0\in\mathbf{U}(p, q, r)$．如果$f\in\mathbf{U}(p, q, r)$而$i=1, \cdots, k$，则

$$|(f-h_p, h_{j_i})|<\frac{1}{q}<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|h_p-f_0\|\cdot\|h_{j_i}\|<\frac{1}{qm}\cdot m<\frac{\varepsilon}{3},$$

而

$$\|f-f_0\|\cdot\|g_i-h_{j_i}\|<2\cdot\frac{1}{2q}<\frac{\varepsilon}{3},$$

（记住$\|f\|\leqslant 1$且$\|f_0\|\leqslant 1$）．由此知$f\in\mathbf{U}$，证完．

证2．还有另一个可供选择的证明程序，它对问题有某些启示而且有这样的贡献（如果这可以说是贡献），即它为$\mathbf{B}$的弱拓扑提供了一个具体的距离．令$\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$是$\mathbf{H}$的一个就范正交基．（假定基是无穷的无损于一般性；在有限维的情形，所有这些拓扑问题都成为不足道的．）对每一矢量f，记

$$|f|=\sum_j\frac{1}{2^j}|(f, e_j)|;$$

由于$|(f, e_j)|\leqslant\|f\|$，这级数收敛并且定义一个范数．如果对任意属于$\mathbf{B}$的f, g，设$d(f, g)=|f-g|$，则d是$\mathbf{B}$中一个距离，要指明d距离化了$\mathbf{B}$的弱拓扑，只须证明$f_n\to 0$（弱）当且只当$|f_n|\to 0$（注意：距离d在$\mathbf{H}$全空间上有意义但它与$\mathbf{H}$的弱拓扑的关系不同于它与$\mathbf{B}$的弱拓扑的关系．下面的论证所需要的是$\mathbf{B}$的元素依一致拓扑的有界性）．

假定 $f_n \to 0$（弱），因此特别有，对每一 j，当 $n\to\infty$ 时 $(f_n, e_j)\to 0$. $|f_n|$ 的级数的尾部对一切 n 一致地小（事实上，$|f|$ 的级数的尾部对 $\mathbf{B}$ 中一切 f 一致地小）. 现在弱收敛的假定蕴涵 $|f_n|$ 的级数的每一特定的部分和当 n 变大时变成很小，由此可知 $|f_n|\to 0$.

假设 $|f_n|\to 0$. 由于 $|f_n|$ 的级数的和优于(大于)每一项，得知对每一 j，当 $n\to\infty$ 时 $(f_n, e_j)\to 0$. 这蕴涵如果 g 是 e_j 的有限线性组合，则 $(f_n, g)\to 0$. 这样的线性组合全体是稠密的. 如果 $h\in\mathbf{H}$，则

$$|(f_n, h)| \leqslant |(f_n, h-g)| + |(f_n, g)|.$$

选择 g 使 $\|h-g\|$ 很小(而因此 $|(f_n, h-g)|$ 也一样地小)，然后选 n 使 $|(f_n, g)|$ 很小. (这里的论证是一种标准的论证，它有时被作为一个独立的引理：在一个稠密集上满足弱收敛条件的有界序列是弱收敛的). 结论：$f_n\to 0$（弱）.

解 19. 如果希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的单位球的弱拓扑是可距离化的，则 $\mathbf{H}$ 是可分的.

证. 如果单位球 $\mathbf{B}$ 是弱可距离化的，则(由于它是弱紧的)它也是弱可分的. 令 $\{f_n: n=1, 2, 3, \cdots\}$ 表示一个在 $\mathbf{B}$ 中弱稠密的可数集. 形如 mf_n, $m, n=1, 2, 3, \cdots$ 的矢量全体的集在 $\mathbf{H}$ 中弱稠密(理由：对固定的 m, mf_n 全体稠于 $m\mathbf{B}$, 而 $\bigcup_m m\mathbf{B}=\mathbf{H}$). 回忆起弱可分希耳伯特空间必是可分的(解 15)，证明即告完成.

解 20. 设 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{H}$ 中一个弱有界集，具体地说，就是 $|(f, g)|\leqslant\alpha(f)$ 对 $\mathbf{T}$ 中一切 g 成立. 如果 $\mathbf{H}$ 是有限维的，容易得证. 的确，如果 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基，则

$$\begin{aligned}|(f, g)| &= \left|\left(\sum_{i=1}^{n}(f, e_i)e_i, g\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(f, e_i)(e_i, g)\right| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|(f, e_i)|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|(e_i, g)|^2} \\ &\leqslant \|f\|\cdot n\cdot\max\{\alpha(e_1), \cdots, \alpha(e_n)\},\end{aligned}$$

而一切都已解决.

现在设 **H** 是无限维的，并且假定结论是谬误的. 从这个假定可以得推论：存在 **T** 的元素 g_1 及单位矢量 e_1 使得 $|(e_1, g_1)|\geq 1$, **T** 所诱导的诸线性泛函（即，映象 $f\to(f, g)$, g 属于 **T**）在 e_1, g_1 张成的至多二维空间的正交补空间上是否有界？如果有界，则它们在 **H** 上有界，与现在假定的相反. 从这段论证可得推论：存在着 **T** 的元素 g_2 以及与 e_1 及 g_1 正交的单位矢量 e_2，使 $|(e_2, g_2)|\geq 2(\alpha(e_1)+2)$. 循此思路，如前论证：**T** 所诱导的线性泛函在 e_1, e_2, g_1, g_2 所张成的至多四维空间的正交补空间上不能是有界的；从而如前断言：存在着 **T** 中元素 g_3 以及与 e_1, e_2 及 g_1, g_2 直交的单位矢量 e_3，使得

$$|(e_3, g_3)|\geq 3\left(\alpha(e_1)+\frac{1}{2}\alpha(e_2)+3\right).$$

由归纳法，n 步之后，可得 **T** 的元素 g_{n+1} 以及与 $e_1, \cdots, e_n$ 及 $g_1, \cdots, g_n$ 正交的单位矢量 e_{n+1}，使

$$|(e_{n+1}, g_{n+1})|\geq(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\alpha(e_i)+n+1\right).$$

现在置 $f=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)e_i$. 由于

$$\begin{aligned}|(f, g_{n+1})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(e_i, g_{n+1})+\frac{1}{n+1}(e_{n+1}, g_{n+1})\right|\\ &\geq -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\alpha(e_i)+\frac{1}{n+1}(n+1)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\alpha(e_i)+n+1\right)\\ &= n+1,\end{aligned}$$

可知 **T** 如果不是有界的，它也不可能是弱有界的.

这个证明属于 D. E. Sarason. 其特例见于 von Neumann [1929, 脚注 32] 和 Stone [1932, 59 页]; Akhieser–Glazman [1961, 45 页] 中有近于一般情形的论证.

解 21. 令 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 表示 **H** 中一个无穷就范正交集，且令 **E** 表示形如 $\sqrt{n}\cdot e_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$ 的矢量全体的集. 断语：原点属于 **E** 的弱闭包. 的确，假定

$$\{f: |(f, g_i)|<\varepsilon, i=1, \cdots, k\}$$

是 0 的一个基弱邻域. 由于对每一 i, $\sum_{n=1}^{\infty}|(g_i, e_n)|^2<\infty$, 得知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|(g_i, e_n)|\right)^2<\infty$(有限个平方可和序列的和仍是平方可和). 由此知至少有 n 的一个值使 $\sum_{i=1}^{k}|(g_i, e_n)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$(否则两边取平方并考虑调和级数). 如果已选取 n 使此不等式满足, 则特别有 $|(g_i, e_n)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ 对每一 i 成立, 而因此对每一 $i(=1, \cdots, k)$ 有 $|(\sqrt{n}\cdot e_n, g_i)|<\varepsilon$.

H 的弱不可距离化的性质可借证明 **E** 中没有弱收敛于 0 的序列而建立. 由于 **E** 中无限集均非有界, 所要求的结论是一致有界原理的一个直接推论.

第一个这一类的构造属于 von Neumann[1929, 380 页]. 上面介绍的是较简单的一个; 它是 A. L. Shields 发现的.

解 22. 记 $g_k=\{\beta_1^*, \cdots, \beta_k^*, 0, 0, 0, \cdots\}$, 于是显然有 $g_k\in l^2$, $k=1, 2, 3, \cdots$. 如果 $f=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\}$ 在 l^2 中, 则 $(f, g_k)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\beta_j\to\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\beta_j$. 由此推得, 对每一 l^2 中的 f 说, 序列 $\{(f, g_k)\}$ 有界, 亦即, l^2 中的矢量列 $\{g_k\}$ 是弱有界的. (由一致有界原理得)结论: 存在一个正常数 β 使对一切 k 有 $\|g_k\|^2\leqslant\beta$, 而因此, $\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j|^2\leqslant\beta$.

上述方法可推广于许多测度空间, 包括一切 σ-有限的测度空间, 假设 X 是一个具有 σ 一有限测度 μ 的测度空间, 又设 g 是 X 上一个可测函数具有性质: 它与 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 中每一函数的积属于 $\mathbf{L}^1(\mu)$; 结论是 g 必属于 $\mathbf{L}^2(\mu)$.

可令 $\{E_k\}$ 表示一个具有有限测度的集的增序列使得 $\bigcup_k E_k=X$ 且 g 在每一 E_k 上有界(这里用到了 σ-有限性). 记 $g_k=\chi_{E_k}g^*$(这里的 χ_{E_k} 是 E_k 的特征函数), $k=1, 2, 3, \cdots$. 证明的其余部分是上述离散情况的证明的明显修改, 只须用积分代替和数.

对于了解闭图象定理的读者说, 还有另外一个解法; 即应用此定理于自 $\mathbf{L}^2$ 到 $\mathbf{L}^1$ 中的线性变换 $f\to fg^*$. 关于闭图象定理的一

个几乎(虽非十分)足够一般的形式的讨论,见问题 44.

解 23. (a) 思路是这样的:一个充分"大"的哥西网可能很想收敛到一个"无界矢量",即收敛到不属于空间的某些东西.为了准确地说明这一点:可令 ξ 表示一个固定的无界线性泛函,在无限维希耳伯特空间中这是一定存在的(应用 Hamel 基可构造一个).令 $\{e_j\}$ 表示一个 Hamel 基,而且,对应于下标集的每一有限子集 J,令 $\mathbf{M}_J$ 表示下标 j 属于 J 的那些 e_j 所张成的(有限维)子空间,考虑线性泛函 ξ_J,它在 $\mathbf{M}_J$ 上等于 ξ 而在 $\mathbf{M}_J^\perp$ 上等于 0.由于诸 ξ_J 是有界的(有限维空间特性),存在矢量的网 $J\to g_J$ 使 $\xi_J(f)=(f, g_J)$ 对每一 f 和每一 J 成立(诸有限集 J 自然依包含关系为序).任给 f_0,令 J_0 表示一个有限集使得 $f_0\in\mathbf{M}_{J_0}$.如果 J 和 K 都包含 J_0,则 $(f_0, g_J)-(f_0, g_K)=0$,由此知 $\{g_J\}$ 是一个弱哥西网.这个哥西网不可能弱收敛于任何元素.假设真的有 $g_J\to g$ (弱),因而对每一固定的 f_0,有 $\xi_J(f_0)\to(f_0, g)$.则当 J_0 大到 $f_0\in\mathbf{M}_{J_0}$,便有 $\xi_{J_0}(f_0)=\xi(f_0)$;由此知 $\xi(f_0)=(f_0, g)$ 对每一 f_0 成立.由于 ξ 无界,这是不可能的.

(b) 每一个希耳伯特空间是序列弱完备的.

证. 如果 $\{g_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中弱哥西序列,则对 $\mathbf{H}$ 中每一个 f,$\{(f, g_n)\}$ 是哥西序列,因而有界,因此 $\{g_n\}$ 弱有界.据一致有界性原理推知 $\{g_n\}$ 有界.由于对 $\mathbf{H}$ 中每一 f,$\lim\limits_n(f, g_n)=\xi(f)$ 存在,又由于 $\{g_n\}$ 的有界性蕴涵线性泛函 ξ 有界,可知 $\mathbf{H}$ 中存在矢量 g 使对一切 f 有 $\lim\limits_n(f, g_n)=(f, g)$.这意味着 $g_n\to g$ (弱),于是 $\{g_n\}$ 果真有一个弱极限.

第三章 解析函数

解 24. 对每一区域 D,内积空间 $\mathbf{A}^2(D)$ 是完备的.

证. 把证明分三步陈述较为方便.

(1) 如果 D 是一个中心在 λ 半径为 r 的圆域,又如 $f\in$

$\mathbf{A}^2(D)$，则

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi r^2}\int_D f(z)d\mu(z).$$

不失一般性，可以圆域 $D_1=\{z:|z|<1\}$ 代一般的圆域 D；一般情形通过适当的平移及改变比例尺的变换可约化成此特殊情形．据此，可假设 $f\in\mathbf{A}^2(=A^2(D_1))$ 具有泰劳级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，并令 D_r 表示圆域 $\{z:|z|<r\}$，$0<r<1$．在每一 D_r，$0<r<1$，f 的泰劳级数一致收敛，因此，它可以逐项积分，这蕴涵

$$\int_{D_r} f(z)d\mu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_{D_r} z^n d\mu(z)=\alpha_0\cdot\pi r^2.$$

由于 $|f|$ 在 D_1 上可积，得知当 $r\to 1$ 时，$\int_{D_r} fd\mu\to\int_{D_1} fd\mu$；又由于 $\alpha_0=f(0)$，(1) 的证明已告完成．

现在回到一般区域 D 的情况．

(2) 如果对任一 $\lambda\in D$ 和 $f\in\mathbf{A}^2(D)$ 有 $v_\lambda(f)=f(\lambda)$，则对每一固定的 λ，泛函 v_λ 是线性的．如果 $r=r(\lambda)$ 是中心在 λ 且全部包含于 D 的最大开圆域的半径，则

$$|v_\lambda(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\,r}\|f\|.$$

令 D_0 表中心在 λ 且全部包含于 D 的最大开圆域．由于

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\int_D|f(z)|^2d\mu(z)\geqslant\int_{D_0}|f(z)|^2d\mu(z)\\&\geqslant\frac{1}{\pi r^2}\left|\int_{D_0} f(z)d\mu(z)\right|^2\quad(\text{据 Schwarz 不等式})\\&=\pi r^2\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{D_0} f(z)d\mu(z)\right|^2=\pi r^2|f(\lambda)|^2\ (\text{据}(1)),\end{aligned}$$

(2)的证明也已完成．

(3) 主要断语的证明现在已不难得到．假设 $\{f_n\}$ 是 $\mathbf{A}^2(D)$ 中的一个哥西序列．由(2)得知对 D 中每一 λ 有

$$|f_n(\lambda)-f_m(\lambda)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot r(\lambda)}\|f_n-f_m\|;$$

和前面一样，这里的 $r(\lambda)$ 是中心在 λ 且全部包含于 D 的最大开圆

域的半径．由此推知，如果 K 是 D 的一个紧子集，因而当 $\lambda\in K$ 时，$r(\lambda)$ 有大于 0 的下界，则函数序列 $\{f_n\}$ 在 K 上一致收敛．这蕴涵存在一个 D 上解析函数 f 使得对一切 D 中的 λ 有 $f_n(\lambda)\to f(\lambda)$．与此同时，希耳伯特空间 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 的完备性蕴涵存在一个 D 上的复值、平方可积、但不一定解析的函数 g，使得 f_n 平方平均收敛于 g．由此推知 $\{f_n\}$ 有一个子序列几乎处处收敛于 g，从而几乎处处有 $f=g$．这蕴涵 f 是平方可积的，亦即，$f\in\mathbf{A}^2(D)$，所以 $\mathbf{A}^2(D)$ 是完备的．

Bergman[1947, p. 24] 首先讨论这些事实；上面的证明属于 Halmos-Lumer-Schäffer[1953]．后者明显地应用到 Riesz-Fischer 定理（$\mathbf{L}^2$ 的完备性），而不是只就上述的特殊情形证明该定理的结论，因此，从希耳伯特空间标准理论的观点看来，它比 Bergman 所给的解析的论证更为简单．

解 25． 内积 (e_n, e_m) 的计算是常规的微积分运算．事实上，如果 $D_r=\{z:|z|<r\}$，则

$$\int_{D_r} z^n z^{*m}\,d\mu(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^r e^{i(n-m)\theta}\rho^{n+m}\rho\,d\rho\,d\theta=2\pi\delta_{nm}\frac{r^{n+m+2}}{n+m+2}.$$

由此（置 $r=1$）推知如 $n\neq m$，则 $(e_n, e_m)=0$，又（置 $n=m$）知 $\|e_n\|^2=1$．这证明了就范正交性．

为了证明诸 e_n 形成一个完备就范正交集，容易想到如下的论证：如果 $f\in\mathbf{A}^2$，具泰劳级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，则 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\,e_n(z)$；这指明 $\mathbf{A}^2$ 中每一 f 是诸 e_n 的线性组合，证毕．这论证已近于正确，毛病在它所论及的收敛性是错误的，虽然 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 在每一点 z 收敛于 $f(z)$，甚至在圆域的每一紧子集中一致收敛，但这些事实本身并不蕴涵该级数依 $\mathbf{A}^2$ 的距离（范数）收敛．

有一个绕过这个难点的简单方法——证明别的一些事实．具体地说，只要证明如果 $f\in\mathbf{A}^2$ 且对 $n=0, 1, 2, \cdots, f\perp e_n$，则 $f=0$，就已足够；而这是问题 25 中第二命题（关于泰劳及富里叶系数间的关系的命题）的直接推论．这个问题是解 24 中(1)（那里仅论

及 e_0)的简捷的推广．特殊情形的证明可适用于一般情形，如下：在每一 D_r 中，$0<r<1$，级数

$$f(z)z^{*m}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n z^{*m}$$

一致收敛，因此，它可以逐项积分．这蕴涵

$$\int_{D_r} f(z)z^{*m}\,d\mu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cdot 2\pi\delta_{nm}\frac{r^{n+m+2}}{n+m+2}$$

$$=\alpha_m\frac{\pi\cdot r^{2m+2}}{m+1}.$$

由于 $|f\cdot e_m^*|$ 在 D_1 上可积，得知当 $r\to 1$ 时，$\int_{D_r} f\cdot e_m^*\,d\mu\to\int_{D_1} f\cdot e_m^*\,d\mu=(f,\ e_m)$，证完．

注意上面的证明隐用了 $\mathbf{A}^2$ 的完备性．上文的推理证明了就范正交集 $\{e_0,\ e_1,\ e_2,\ \cdots\}$ 是极大的；而仅当空间是完备的，一个极大的就范正交集才堪称为一个基．关键在于如缺完备性，则富里叶级数的收敛性得不到保证．

诸 e_n 形成一个基的别证如下，它在较不隐蔽的状况下应用了完备性．如果 $f\in\mathbf{A}^2$，具有泰劳级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，则 $(f,\ e_n)=\sqrt{\pi/(n+1)}\cdot\alpha_n$．据 Bessel 不等式，这蕴涵

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi|\alpha_n|^2}{n+1}$$

收敛．由此推知第 n 项为

$$\sqrt{\pi/(n+1)}\cdot\alpha_n e_n(z)$$

的级数平均平方收敛；这个结论正好面对着而且也克服了上述应用幂级数展开式的素朴论证中所遇到的障碍．

这个结果建立了 $\mathbf{A}^2$ 与下述的希耳伯特空间之间的一个自然的同构对应，此空间由序列 $\langle\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\rangle$ 组成，它们满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha_n|^2}{n+1}<\infty,$$

而 $\langle\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\rangle$ 与 $\langle\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\rangle$ 的内积由下式给出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi\alpha_n\beta_n^*}{n+1}.$$

解 26. 命题中的断语在形式演算上几乎是显然的. 对 $\mathbf{L}^2$ (不仅 $\mathbf{H}^2$) 中任一 f, 取其富里叶展式 $f=\sum_n \alpha_n e_n$, 求共轭复数得

$$f^*=\sum_n \alpha_n^* e_n^*=\sum_n \alpha_n^* e_{-n}=\sum_n \alpha_{-n} e_n^*;$$

由此得知如果 $f=f^*$, 则对一切 n 有 $\alpha_n=\alpha_{-n}^*$. 如更有 $f\in\mathbf{H}^2$, 使得对 $n<0$ 有 $\alpha_n=0$, 则可推知 $n\neq 0$ 时必有 $\alpha_n=0$, 而 $f=\alpha_0$.

这个论证的毛病在于它假定了复共轭对应关于富里叶展开式的分配律成立; 这个假定必须加以核证或设法避免掉. 它可以如下核证: $\sum_n \alpha_n e_n$ 的有限部分和在 $\mathbf{L}^2$ 范数的意义下即平均平方意义下收敛于 f; 由此知它们的一个子序列几乎处处收敛于 f, 于是所指望的结果可从共轭对应的连续性推知. 这个假定可以这样地避免掉: 由于 $\alpha_n=\int f e_n^*\, d\mu$, 得知 $\alpha_{-n}^*=(\int f e_{-n}^*\, d\mu)^*=\int f^* e_n^*\, d\mu$, 因此如果 $f=f^*$, 便的确有 $\alpha_n=\alpha_{-n}^*$. 最后这段论证也适用于 $\mathbf{L}^1$, 正如它适用于 $\mathbf{L}^2$ 那样, 懂得这一点有时是有用的; 由此可推知常数是 $\mathbf{H}^1$ 中唯一的实函数.

解 27. 就象(问题 26 中)关于 $\mathbf{H}^2$ 中实函数的断语那样, 本题的断语在形式演算上是显然的. 如果 f 和 g 都属于 $\mathbf{L}^2$, 分别具富里叶展开式

$$f=\sum_n \alpha_n e_n,\quad g=\sum_m \beta_m e_m,$$

则

$$fg=\sum_n\sum_m \alpha_n\beta_m e_n e_m=\sum_k\Big(\sum_n \alpha_n\beta_{k-n}\Big)e_k.$$

如果 f 和 g 还属于 $\mathbf{H}^2$, 使得 $n<0$ 时都有 $\alpha_n=\beta_n=0$, 则 $k<0$ 时有 $\sum_n \alpha_n\beta_{k-n}=0$. 理由: 对每一项 $\alpha_n\beta_{k-n}$, 或是 $n<0$, 此时 $\alpha_n=0$, 或是 $n\geqslant 0$, 此时 $k-n<0$, 因此 $\beta_{k-n}=0$.

这个论证的毛病在于它假定了积的富里叶级数等于因子的富里叶级数的形式乘积. 这个假定可使用解 26 用过的子序列技巧加以核证. 另一选择是如下避免这个假定. 内积 (f, g^*) 等于

$\sum \alpha_n\beta_{-n}$（根据 Parseval 等式，以及解 26 中关于复共轭式的富里叶系数的结果），换言之，fg 的下码为零的富里叶系数由下式给出：

$$\int fg\,d\mu=\sum_n \alpha_n\beta_{-n}.$$

继续用此结果，但以 ge_k^* 代替 g. 由于 ge_k^* 的富里叶系数 γ_n 由下式给出：

$$\gamma_n=\int ge_k^*e_n^*\,d\mu=\int ge_{k+n}^*\,d\mu=\beta_{k+n},$$

可推知

$$\int fge_k^*d\mu=\sum_n \alpha_n\gamma_{-n}=\sum_n \alpha_n\beta_{k-n}.$$

这个结果的一个直接推论是，如果 $f\in\mathbf{H}^\infty$ 且 $g\in\mathbf{H}^2$，则 $fg\in\mathbf{H}^2$. 如果 $f\in\mathbf{H}^\infty$ 且 $g\in\mathbf{H}^1$ 则 $fg\in\mathbf{H}^1$ 同样也是真的，但其证明要求更多一些的解析复杂性.

解 28. 如果 $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 当 $|z|<1$，则当 $0<r<1$ 且 $|z|=1$ 时 $\phi_r(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n z^n$. 由于，对每一固定的 r，后一级数在单位圆周上一致收敛，它在每一其它有用的（收敛）意义下也是收敛的；特别由此推知 ϕ_r 在 $\mathbf{L}^2$ 中的富里叶级数展开式是 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n e_n$，因此 $\phi_r\in\mathbf{H}^2$.

由于 $\|\phi_r\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2 r^{2n}$，第二（也是主要的）断语化归为：如果 $\beta=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2$ 而 $\beta_r=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2 r^{2n}$，则 $\beta<\infty$ 的充要条件是诸 $\beta_r\,(0<r<1)$ 有界. 这结果从一个方向（必要条件）说，是不足道的；因为对一切 r 有 $\beta_r\leqslant\beta$，得知如果 $\beta<\infty$，则诸 β_r 有界，相反地，现在假设对一切 r 有 $\beta_r\leqslant\gamma$. 可以推知对每一正整数 k，

$$\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2=\left(\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2-\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2 r^{2n}\right)+\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2 r^{2n}$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2(1-r^{2n})+\beta_r\leqslant\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2(1-r^{2n})+\gamma.$$

对固定的k，选择r使得$\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2(1-r^{2n})<1$；这是可以做到的，因为这个有限和是$r$的一个多项式(而因此是连续的)，它当$r=1$时等于0．结论：对一切$k$有$\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2\leqslant 1+\gamma$，而这蕴涵$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\leqslant 1+\gamma$.

解 29．从一个任意的，譬如在集X上的，无穷维函数希耳伯特空间$\mathbf{H}$出发，给它添上一个元素，这个元素的作用就象一个无界线性泛函．具体地说，设ϕ是$\mathbf{H}$上一个无界线性泛函(它是存在的因为$\mathbf{H}$是无限维的)，且记$X^+=X\cup\{\phi\}$．令$\mathbf{H}^+$表X^+上这样的函数f^+全体的集（一个逐点线性空间），这些函数在X上的限制，譬如说是f，是在$\mathbf{H}$中，而它们在ϕ的值则等于$\phi(f)$(等价地说：对$\mathbf{H}$中每一f，定义$f^+(\phi)=\phi(f)$，f就扩张成为X^+上的f^+)．如果f^+和g^+都属于$\mathbf{H}^+$，其限制分别为f和g，定义$(f^+, g^+)=(f, g)$(等价地说：定义f与g的扩张的内积等于f与g的内积)．具如此的内积的矢量空间$\mathbf{H}^+$(例如：经由限制映象)同构于具原来的内积的$\mathbf{H}$，因此$\mathbf{H}^+$是以函数为元素的希耳伯特空间．由于$\phi\in X^+$而$f^+(\phi)=\phi(f)$对$\mathbf{H}$中一切f成立，又由于ϕ非有界，得知$|\phi(f)|$对单位矢量f可能很大，而因此$|f^+(\phi)|$对单位矢量f^+可能很大．

解 30．如果$\mathbf{H}$是一个函数希耳伯特空间，设是在集X上的，具就范正交基$\{e_j\}$和核函数K，今记$K_y(x)=K(x, y)$，且对X中每一y，考虑K_y的富里叶展开式：

$$K_y=\sum_j(K_y, e_j)e_j=\sum_j e_j(y)^*e_j.$$

由 Parseval 恒等式可推得

$$K(x, y)=(K_y, K_x)=\sum_j e_j(x)e_j(y)^*.$$

在$\mathbf{A}^2$中由

$$e_n(z)=\sqrt{(n+1)/\pi}\,z^n \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

定义的$|z|<1$上的函数e_n形成一个就范正交基（参看问题 25），(由上面所得结果)可推知$\mathbf{A}^2$的核函数K由下式给出

$$K(x, y)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n y^{*n}$$

(注意这里的 x 和 y 是单位开圆域内的复数). 由于当 $|z|<1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=1/(1-z)^2$ (试积分左边以得此式, 或展开右边以验证之), 可推知

$$K(x, y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-xy^*)^2}.$$

再论 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$: 按定义, 它由单位圆域上对应于 $\mathbf{H}^2$ 的元素 f 的函数 $\tilde{f}$ 组成. 如果 $f=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$ 又如 $|y|<1$, 则 $\tilde{f}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y^n$ 因此 $\tilde{f}(y)=(f, K_y)$, 其中 $K_y=\sum_{n=0}^{\infty}y^{*n}e_n$. 这一下子证明了两点: 它证明了 $\tilde{f}\to\tilde{f}(y)$ 是一个有界线性泛函 (因此 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 是一个函数希耳伯特空间), 它也证明了 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数由下式给出

$$K(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n y^{*n},\ |x|<1,\ |y|<1.$$

以有限形式表之: $K(x, y)=1/(1-xy^*)$.

解 31. 令 K 表 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的核函数 (参看解 30). 如果在 $\mathbf{H}^2$ 中 $f_n\to f$, 又如 $|y|<1$, 则

$$|\tilde{f}_n(y)-\tilde{f}(y)|=|(\tilde{f}_n-\tilde{f}, K_y)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|K_y\|.$$

由于

$$\|K_y\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|y|^{2n}=\frac{1}{1-|y|^2},$$

可推知如果 $|y|\leqslant r$, 则

$$|\tilde{f}_n(y)-\tilde{f}(y)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\frac{1}{1-r^2}.$$

解 32. 函数 $\tilde{f}$ 确定了 f——但怎样地确定? 泰劳及富里叶展开式对于诸如有界性一类的结构性质并没有很多启示. 解决这个问题的最有用的方法是去证明 (在单位圆上的) f 的值是 (在单位圆域上的) $\tilde{f}$ 的值的在某种意义上的极限. 为此, 记

$$f_r(z)=\tilde{f}(rz),\ 0<r<1,\ |z|=1.$$

函数 f_r 属于 $\mathbf{H}^2$(参看问题 28); (待证的)断语是, 在依 $\mathbf{H}^2$ 的范数收敛的意义下 $f_r\to f$ (当 $r\to1$). (尚未涉及 $\tilde{f}$ 的有界性.)

为了证明这个断语，请回忆如果 $f=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$，则 $f_r=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n e_n$，而因此

$$\|f-f_r\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2(1-r^n)^2.$$

由此推知对每一正整数 k，

$$\|f-f_r\|^2\leqslant\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|^2(1-r^n)^2+\sum_{n=k+1}^{\infty}|\alpha_n|^2.$$

我们期望的结论（当 r 近于 1 时 $\|f-f_r\|$ 很小）现在就容易得到了：选 k 足够大使第二加数（这与 r 无关）很小，然后令 r 充分接近 1 以使第一加数很小.

由于 $\mathbf{L}^2$ 中的收敛性蕴涵存在着几乎处处收敛的子序列，可知有一个合适的子序列 $\{r_n\}$，$r_n\to 1$，使 $f_{r_n}\to f$；由此立即推得关于 f 的有界性的断语.

其实断语 $f_r\to f$ 还在一个与二阶平均收敛不同（比它更好？）的意义上是真的；事实上，f_r 几乎处处收敛于 f. 换一种说法，这就是说，如果圆域中的一点 z 沿径向趋于一个边界点 z_0，则对几乎处处的 z_0，函数值 $\tilde{f}(z)$ 趋于 $f(z_0)$. 这结论还可以加强，例如径向收敛还可代以非切（线方）向收敛. 这些分析上的精致技巧是数学的某些部门的兴趣所在；但在希耳伯特空间理论的研究中，依范数收敛已是足够的了.

解 33. 如果 $f\in\mathbf{H}^\infty$，则 $\tilde{f}$ 有界，且事实上，$\|\tilde{f}\|_\infty=\|f\|_\infty$.（在圆域中，范数指 $\tilde{f}$ 的上确界，而在边界上，范数指 f 的本性上确界.）

证. 考虑下列两断语. (1) 如果 $f\in\mathbf{L}^\infty$，又不妨设 $|f|\leqslant 1$，则存在三角多项式序列 $\{f_n\}$ 依 $\mathbf{L}^2$ 的范数收敛于 f 并对一切 n 有 $|f_n|\leqslant 1$；且如果 f 还属于 $\mathbf{H}^\infty$，则诸 f_n 也是如此. (2) 如果 p 是多项式又设当 $|z|=1$ 时 $|p(z)|\leqslant 1$，则当 $|z|<1$ 时，恒有 $|p(z)|\leqslant 1$. 这两断语都是分析中的已知结论：(1) 是关于富里叶级数的 Cesaro 收敛性的 Fejér 定理的推论，而 (2) 是应用极大模原理于多项式的结果. 这两断语中，似乎 (2) 远被更多人所懂得，不管怎样，

下面将不再加任何说明地应用 (2)；也将用到 (1)，但以后，将补述证明轮廓.

容易从前段的两断语导出关于 $\tilde{f}$ 的有界性的结论. 已知 $\mathbf{H}^\infty$ 中的 f，假定 $|f|\leqslant 1$ (这不过是一个规范化问题)并应用 (1) 求得三角多项式 f_n 使得 $|f_n|\leqslant 1$ 并使 $f_n\to f$ (依 $\mathbf{L}^2$ 的范数). 由于根据 (1)，诸 f_n 本身都属于 $\mathbf{H}^\infty$(可以这样选择)，可推知它们到圆内部的扩张也都是多项式. 由于 $f_n\to f$ (依 $\mathbf{H}^2$ 的范数)，由问题 31 知当 $|z|<1$ 时 $\tilde{f}_n(z)\to\tilde{f}(z)$. 据 (2)，对一切 n 和一切 z 有 $|\tilde{f}_n(z)|\leqslant 1$. 结论：对一切 z 有 $|\tilde{f}(z)|\leqslant 1$.

不等式 $\|\tilde{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ 已隐含于上述证明中. 要得到反向不等式，可利用解 32($r\to 1$ 时 $f_r\to f$).

剩下的是察看一下 (1) 的证明. 如果 $f=\sum_n \alpha_n e_n$，记 $S_k=\sum_{j=-k}^{+k}\alpha_j e_j (k=0, 1, 2, \cdots)$. 显然有 $S_k\to f$ (在 $\mathbf{L}^2$ 中)，但这还不够好，由此不能得到必要的有界性结果(如果 $|f|\leqslant 1$，不能推知 $|S_k|\leqslant 1$). 补救办法是考虑平均数

$$t_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(注意如果 $f\in\mathbf{H}^2$，诸 t_n 也是如此). 显然 $t_n\to f$(在 $\mathbf{L}^2$ 中). (事实上已知 $t_n\to f$ (几乎处处)，但其证明并非不足道的，幸而这事实我们这里不需要). 这就显得够好了：如果 $|f|\leqslant 1$，确能由此推知 $|t_n|\leqslant 1$.

为了证明，设 $D_k=\sum_{j=-k}^{k}e_j (k=0, 1, 2, \cdots)$ 和 $K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$；函数序列 D_k 和 K_n 分别被称为 Dirichlet 和 Fejér 核. 由于 $\int D_k\,d\mu=\int e_0\,d\mu=1$，可推知 $\int K_n\,d\mu=1$. K_n 的主要性质是它们的值是实的，且事实上是正的. 这可通过计算来证明. $z=1$ 时，这是显然的；$z\neq 1$ (但当然有 $|z|=1$) 时，记 $D_k(z)=1+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k}z^j (k=1, 2, 3, \cdots)$，可应用几何级数求和公式得

$$D_k(z)=2\mathrm{Re}\left(\frac{z^k-z^{k+1}}{|1-z|^2}\right).$$

(计算的窍门：注意如果 $|z|=1$，则 $|1-z|^2=2\mathrm{Re}(1-z)$.) 代入 K_n 的表示式中，注意到和式因各项相消而缩短，便得

$$K_n(z)=\frac{2}{n}\mathrm{Re}\frac{1-z^n}{|1-z|^2}.$$

由此，K_n 是实的就是显然的了．又由于，$\mathrm{Re}\,z^n\leqslant1$（请记起 $|z^n|=|z|^n=1$），亦即，$1-\mathrm{Re}\,z^n\geqslant0$，可推知 $K_n(z)\geqslant0$，如所断言．

要对 f 应用这些结果，注意

$$S_k(z)=\sum_{j=-k}^{k}\int f(y)y^{*j}z^j\,d\mu(y)=\int D_k(y^*z)f(y)\,d\mu(y)$$

$$=\int D_k(y)f(y^*z)\,d\mu(y),$$

以及由此推得的

$$t_n(z)=\int K_n(y)f(y^*z)\,d\mu(y);$$

这蕴涵，如果 $|f|\leqslant1$，则

$$|t_n(z)|\leqslant\int K_n(y)|f(y^*z)|\,d\mu(y)\leqslant\int K_n(y)\,d\mu(y)=1.$$

证明已经完毕．这里再提一个有时有用的技巧上的评论：在(1)的假定下可以不必区分结论中的收敛性究竟是依范数的还是几乎处处的．理由：如果它是依范数的，则有一个子序列几乎处处收敛；如果它是几乎处处的，则据勒贝格有界收敛定理，它也是依范数的．

解 34. 如果 $f\in\mathbf{H}^\infty$，$g\in\mathbf{H}^2$，且 $h=fg$，则 $\tilde{h}=\tilde{f}\tilde{g}$.

证． 按本问题的提法，难点不在解答而在如何确切解释其意义。如果 f 和 g 属于 $\mathbf{H}^2$ 且 $h=fg$，则 h 不一定属于 $\mathbf{H}^2$，从而有时问题 28 中所给定义不能适用于 h；不能定义如 $\tilde{h}$ 这样的函数．最简单的解决办法是假定有一个因子（如 f）是有界的；这时问题 27 证明了 $h\in\mathbf{H}^2$，而问题就有了意义．（还有一个解决方法就是据问题 27，注意到 $h\in\mathbf{H}^1$，把过渡到圆域内去的步骤推广到 $\mathbf{H}^1$.

这一方法引起某些虽非无法解决但确与主题无关的分析上的困难.)一旦问题有了意义,解答就从解 27 自然地推出. 那里的结果是,用 f 和 g 的富里叶系数表示 h 的富里叶系数的方法与用 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 的泰劳系数表示 $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ 的泰劳系数的方法完全一样. 换句话说,形式乘法同样适用于富里叶和泰劳级数,而因此从其中一方到另一方的映射是乘法的.

解 35. 为了诱导出(例如)从 u 构造 f 的思路,一种好想法就是把问题转过来探究从 f 得到 u 的途径. 因此,先假设 $f\in\mathbf{H}^2$ 且具有富里叶展开式 $f=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$,并记 $u=\operatorname{Re} f$. 由于 $|u|<|f|$,函数 u 属于 $\mathbf{L}^2$. 如果 u 的富里叶展开式是 $u=\sum_n \xi_n e_n$,则(参看解 26)

$$u=\frac{1}{2}(f+f^*)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n e_n+\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n^* e_{-n}\Big)$$

$$=\operatorname{Re}\alpha_0+\sum_{n>0}\frac{1}{2}\alpha_n e_n+\sum_{n<0}\frac{1}{2}\alpha_{-n}^* e_n,$$

所以

$$\xi_0=\operatorname{Re}\alpha_0 \text{ 且 } \xi_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\alpha_n, & \text{当 } n>0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\alpha_{-n}^*, & \text{当 } n<0.\end{cases}$$

反过来要怎样进行,现在就清楚了. 给定 $u=\sum_n \xi_n e_n$,其中 $\xi_n=\xi_{-n}^*$,特别是,ξ_0 是实的. 记

$$\alpha_0=\xi_0, \text{ 又 } \alpha_n=2\xi_n=2\xi_{-n}^*=\xi_n+\xi_{-n}^* \quad (n>0).$$

由于诸 α 所成序列是平方可和的,$f=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n e_n$ 确定了 $\mathbf{H}^2$ 中的一个元素 f. 记

$$f=Du$$

(D 表 Dirichlet); 则对 $\mathbf{L}^2$ 中每一实的 u 有 $\operatorname{Re} Du=u$. 命题"$D\operatorname{Re} f=f$ 对 $\mathbf{H}^2$ 中每一f 成立"不是真的,但也近于是真的: 差 $f-D\operatorname{Re} f$ 是一个可以任意指定的纯虚常数.

关于本命题用 v 表述的形式的解: 已知 u,可置 $v=\operatorname{Im} Du$,由

于 $\operatorname{Im} Du = -\operatorname{Re}(iDu)$，容易得到 v 的富里叶系数的显式表示式. 设如上述，$u = \sum_n \xi_n e_n$ 而 $f = Du = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n$，则

$$v = \operatorname{Im} f = \frac{i}{2}(f^* - f) = \frac{i}{2}\left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n^* e_{-n} - \sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n\right).$$

如果 $v = \sum \eta_n e_n$，则

$$\eta_0 = \operatorname{Im} \xi_0, \text{而} \ \eta_n = \begin{cases} -\frac{i}{2}\cdot 2\xi_n = -i\xi_n, \text{当} n > 0, \\ \frac{i}{2}\cdot 2\xi_n = i\xi_n, \text{当} n < 0. \end{cases}$$

如果 $\operatorname{Im} \xi_0 = 0$，这结果可以简洁地表示为：对一切 n，

$$\eta_n = (-i \operatorname{sgn} n)\xi_n.$$

当仅涉及单位圆上的 $\mathbf{L}^2$ 函数时，这些代数上简单结论实际不过是单位圆域上 Dirichlet 问题的结论，用 u 表示 v 的形式表示式即使 u 不一定是实的也仍有意义，而有关名称(共轭函数，希耳伯特变换式)仍旧不变. 重要的是要注意一个有界函数的希耳伯特变换式不一定有界，或(考虑到圆域内的扩张)换句话说，无界解析函数可以有有界的实部. 标准的例子：$f(z) = i\log(1-z)$.

第四章 无 穷 矩 阵

解 36. 由于 $\mathbf{H}$ 可表为约化 A 的可分子空间的直接和，无损于普遍性，可先设 $\mathbf{H}$ 是可分的. 这个评述，虽然在证明中作用微弱，但消除了必须考虑不可列性的变态的不便.

有一种吸引人的证明尝试，虽然最终是要失败的，但却很有启发性. 令 e_1 表示一个任意的单位矢量. 由于 e_1 和 Ae_1 张成一个至多二维的子空间，可以推知，除非 $\dim \mathbf{H} = 1$，必存在一个单位矢 e_2 正交于 e_1 使得 $Ae_1 \in \vee\{e_1, e_2\}$. 由于 e_1, e_2 和 Ae_2 张成一个至多三维的子空间，可以推知，除非 $\dim \mathbf{H} = 2$，必存在一个单位矢 e_3 与 e_1 和 e_2 正交并使 $Ae_2 \in \vee\{e_1, e_2, e_3\}$. 如此重复下去，据归纳法，可得到一个就范正交序列 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ (它只当 $\dim \mathbf{H}$

$<\infty$ 时才是有限的)，使得 $Ae_n\in\vee\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}\}$. 在有限维的情形,结论已经很明白，但按现在的观点说，这又不是我们所感兴趣的. 在无限维的情形,当 $i>j+1$ 时 $(Ae_j, e_i)=0$,似乎一切问题都解决了. 但还存在一个难点：没有理由可以假设这些 e_n 会形成一个基. 如果它们不形成基,则把它们嵌入一个就范正交基的过程可能会破坏矩阵的列有限性. 这就是说可能发生这样的情形,对于与所有的 e_n 正交的某些 e 说，无穷多个富里叶系数 (Ae, e_i) 不等于 0. 如果遇到 A 是自伴的，便不会发生这样的麻烦. 诸 e_n 的张成子空间,在 A 作用之下总是不变的,所以,对于自共轭的 A 说，它还约化 A；由此推知,当诸 e_n 被嵌入一个就范正交基时,矩阵的新元素与旧的列不相干. 这个证明，在 A 自伴的情形下,证明了比原先期望的更多的东西：它证明了每一自伴算子具有 Jacobi 矩阵 (Jacobi 矩阵就是这样的自共轭矩阵，它的一切非 0 元素都或在主对角线上或在与主对角线相邻的两个对角线上. 某些作者还要求矩阵是不可约的,就是说,与主对角线相邻的对角线上的元素都不为 0). 其实，如果当 $i>j+1$ 时 $(Ae_j, e_i)=0$,则当 $i>j+1$ 时，也有 $(e_j, Ae_i)=0$；把诸 e_n 归纳地扩大成一个(其各元素如同 e_n 一样地被选出的)就范正交基,论证便告完成.

对于非自伴的情形，论证须如下更加精确化(而结论则减弱成原来所给的形式). 令 $\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ 表示 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基. 置 $e_1=f_1$. 求一个单位矢 e_2 与 e_1 正交,并使 $Ae_1\in\vee\{e_1, e_2\}$ (再一次只注意无穷维空间的情形). 接着求一个单位矢 e_3 与 e_1, e_2 正交,使得 $f_2\in\{e_1, e_2, e_3\}$，然后再求一个单位矢 e_4 与 e_1, e_2 及 e_3 正交并使 $Ae_2\in\vee\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，如此继续下去，交迭地,先抓 f_n，接着抓 Ae_n (如果它还没有被抓到). 新的 e 的选择总是可能的. 一般的引理是：对于每一有限维子空间 $\mathbf{M}$ 和任一矢量 g，总存在一个单位矢 e 与 $\mathbf{M}$ 正交使得 $g\in\mathbf{M}\vee\{e\}$. 结论：根据构造方法,序列 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 是就范正交的；它形成一个基因为它的张成子空间包含每一个 f_n；它还具有性质；对于每一 n，有一个 i_n (如果需要的话可以计算出来)，使得 $Ae_n\in\vee\{e_1, \cdots, e_{i_n}\}$. 这个

最后条件蕴涵当 $i>i_j$ 时恒有 $(Ae_j, e_i)=0$, 证完.

解 37. 如果 $\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$ 是一个有限非零复数序列 (即当 n 充分大时, $\xi_n=0$), 则

$$\sum_i\left|\sum_j \alpha_{ij}\xi_j\right|^2=\sum_i\left|\sum_j\sqrt{\alpha_{ij}}\sqrt{p_j}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{ij}}\xi_j}{\sqrt{p_j}}\right)\right|^2$$
$$\leqslant\sum_i\Big(\sum_j\alpha_{ij}p_j\Big)\left(\sum_j\frac{\alpha_{ij}|\xi_j|^2}{p_j}\right)$$
$$\leqslant\sum_i\gamma p_i\sum_j\frac{\alpha_{ij}|\xi_j|^2}{p_j}=\gamma\sum_j\frac{|\xi_j|^2}{p_j}\sum_i\alpha_{ij}p$$
$$\leqslant\gamma\sum_j\frac{|\xi_j|^2}{p_j}\cdot\beta p_j=\beta\cdot\gamma\sum_j|\xi_j|^2.$$

这些不等式蕴涵: l^2 上的由下式

$$A\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\left\langle\sum_j\alpha_{0j}\xi_j, \sum_j\alpha_{1j}\xi_j, \sum_j\alpha_{2j}\xi_j, \cdots\right\rangle$$

定义的算子 A 适合要求的条件.

解 38. 这结论是问题 37 的系. 应用问题 37, 置 $p_i=1\Big/\sqrt{i+\frac{1}{2}}$ 即得证明. 由于 Hilbert 矩阵是对称的, 验证两不等式(其中 $\beta=\gamma=\pi$) 中之一就已足够. 验证可借助于初等微积分, 如下:

$$\sum_i\alpha_{ij}p_i=\sum_i\frac{1}{\left(i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{i+\frac{1}{2}}}<\int_0^\infty\frac{dx}{\left(x+j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}}$$
$$=2\int_0^\infty\frac{du}{u^2+j+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty\frac{du}{u^2+1}=\frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.$$

第五章　有界性与可逆性

解 39. 令 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 表示希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的一个就范正交基, 求 $\mathbf{H}$ 的一个 Hamel 基使其包含每一 e_n. 令 f_0 表这个 Hamel 基的与每一 e_n 不同的一个随意但固定的元素 (参看解 5). 在 $\mathbf{H}$ 上按以下要求可唯一地定义一个线性变换 A, 这要求是

$Af_0=f_0$ 且对所选基的其它一切元素有 $Af=0$，特别是对一切 n 有 $Ae_n=0$. 设或 A 是有界的，则它在每一个 e_n 上为 0 将蕴涵 $A=0$. 这就解决了问题的第一和第三两部分.

对第二部分，可随意选定一个正整数 k，并由

$$Af=(f,\ e_1+\cdots+e_k)e_1$$

定义(与 k 有关的)算子 A. 由此推得 $Ae_n=e_1$ 或 0，视 $n\leqslant k$ 或 $n>k$，从而对一切 n 有 $\|Ae_n\|\leqslant 1$. 由于(据简易的计算) $A^*f=(f,\ e_1)\cdot(e_1+e_2+\cdots+e_k)$ 对一切 f 成立，从而特别有 $A^*e_1=e_1+\cdots+e_k$，可知

$$\|A\|=\|A^*\|\geqslant\|A^*e_1\|=\|e_1+\cdots+e_k\|=\sqrt{k}$$

这一切的另一种很简单的说法是去描述 A 的关于基 $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ \cdots\}$ 的矩阵：其第一行的前面 k 个元素是 1，此外其它元素都是 0.

解 40. 这结论可以经连续两次应用关于矢量的一致有界性原理 (问题 20) 而得到. 假设 $\mathbf{Q}$ 是一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的线性有界算子的弱有界集，又特别设，$|(Af,\ g)|\leqslant\alpha(f,\ g)$ 对 $\mathbf{Q}$ 中一切 A 成立. 固定一个任选的矢量 g_0 且记 $\mathbf{T}_0=\{A^*g_0: A\in\mathbf{Q}\}$. 由于

$$|(f,\ A^*g_0)|=|(Af,\ g_0)|\leqslant\alpha(f,\ g_0),$$

集 $\mathbf{T}_0$ 在 $\mathbf{H}$ 中弱有界，而因此存在一个常数 $\beta(g_0)$ 使得 $\|A^*g_0\|\leqslant\beta(g_0)$ 对 $\mathbf{Q}$ 中一切 A 成立.

其次，记 $\mathbf{T}=\{Af: A\in\mathbf{Q},\ f\in\mathbf{B}\}$，此处 $\mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{H}$ 的单位球，由于

$$|(g,\ Af)|=|(A^*g,\ f)|\leqslant\beta(g)\cdot\|f\|\leqslant\beta(g),$$

集 $\mathbf{T}$ 在 $\mathbf{K}$ 中是弱有界的，而因此存在一个常数 γ，使得

$$\|Af\|\leqslant\gamma$$

当 $A\in\mathbf{Q}$ 而 $f\in\mathbf{B}$ 时恒成立. 这蕴涵

$$\|A\|\leqslant\gamma,$$

证完.

解 41. 证明 A^* 是可逆的就已足够. A^* 的值域稠于 $\mathbf{H}$ (因为 A 的核是平凡的)，因此，只须证明 A^* 是下有界的. 意即对某些 δ(和 $\mathbf{K}$ 中一切 g)有 $\|A^*g\|\geqslant\delta\|g\|$. 要证明它，又只须证对某

些 δ, 如果 $\|A^*g\|=1$, 则 $\|g\|\leqslant 1/\delta$. 注意: 最后的一步简化用到 A^* 的核是平凡的假定, 这假定确是真的, 因为 A 的值域稠于 $\mathbf{K}$. (A 把 $\mathbf{H}$ 映射到 $\mathbf{K}$ 上的假定的全部威力下面即可看到.) 欲知难点所在, 试设 A^* 就是变换 0. 此时从 $\|A^*g\|=1$ 到 $\|g\|\leqslant 1/\delta$ 的蕴涵关系虽成立, 但却毫无作用. 小结: 只须证明如果 $\mathbf{S}=\{h: \|A^*h\|=1\}$, 则集 $\mathbf{S}$ 是有界的, 为此又只须证它是弱有界的. 要证明这一点, 任取 g 属于 $\mathbf{K}$, 在 $\mathbf{H}$ 中可以求得 f 使 $Af=g$, 容易看到

$$|(g, h)|=|(Af, h)|=|(f, A^*h)|\leqslant\|f\|$$

对 $\mathbf{S}$ 中一切 h 成立. 证完.

解 42. 假设 $\dim\mathbf{K}<\dim\mathbf{H}$, 不失一般性, 可设 $\mathbf{K}\subset\mathbf{H}$. 据此, 又可设 A 是一个 $\mathbf{H}$ 上的算子, 其值域包含于 $\mathbf{K}$; 所需证明的是 $\ker A$ 是非平凡的. 设 $\dim\mathbf{K}$ 是无穷的; 这个设定所排除的只是些不足道的情况. 令 $\{f_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 分别表示 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 的就范正交基. 每一 A^*g_j 可以表示成含至多可列个 f 的展开式, 上设的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 的维数间的不等式蕴涵存在一个 i, 使 $(f_i, A^*g_j)=0$ 对一切 j 成立. 由于 $(f_i, A^*g_j)=(Af_i, g_j)$, 可推知 Af_i 正交于每一 g_j 而因此正交于 $\mathbf{K}$. 可是 A 的值域包含于 $\mathbf{K}$, 由此得知 $Af_i=0$.

其次考虑关于等式的命题, 如果 $\dim\mathbf{H}$ 有限, 一切是不足道的. 如果 $\dim\mathbf{H}$ 无穷, 则有一个以 $\dim\mathbf{H}$ 为基数的集稠于 $\mathbf{H}$(利用有理线性组合. 参看解 11). 由此推知有一个以 $\dim\mathbf{H}$ 为基数的集稠于 $\mathbf{K}$, 而这又蕴涵 $\dim\mathbf{K}\leqslant\dim\mathbf{H}$.

上述证明是初等的, 但是, 作为一个十分自然的命题的证明, 它绝不是十分显然的 (它, 有些偶然地, 属于 G. L. Weiss; 参看 Halmos-Lumer[1954]). 有一个较迅捷的证明, 不过它基于一个不很浅易的理论(极分解). 证明如下: 如果 A 是自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 中的一对一线性变换, 具有极分解 UP (参看问题 105), 则因 $\ker A=\{0\}$, 可推知 U 是一个等距算子. 至于等式的情形: 如果 $\operatorname{ran} A$ 稠于 $\mathbf{K}$, 则 $\operatorname{ran} U$ 等于 $\mathbf{K}$.

解 43. 首先注意到 P 的值域中的非零矢量不会被 Q 变成零. 的确, 如果 $Pf=f$ 而 $Qf=0$, 则 $\|Pf-Qf\|=\|f\|$, 而因此

$f\neq 0$ 将蕴涵 $\|P-Q\|\geqslant 1$. 由此推知 Q 在 P 的值域上的限制是从这个值域到 Q 的值域中的一对一线性有界变换, 因此 P 的秩小于或等于 Q 的秩(问题 42). 从对称性即得求证结论.

解 44. 假设 A 是一个自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的线性变换, 且先设 A 是有界的. 令 $\{\langle f_n, Af_n\rangle\}$ 表示 A 的图象中的一个矢量序列, 它收敛于某矢量, 譬如 $\langle f_n, Af_n\rangle\to(f, g)$. 由于 $f_n\to f$ 且 A 是连续的, 可推知 $Af_n\to Af$; 由于同时有 $Af_n\to g$, 可推知 $g=Af$, 从而 $\langle f, g\rangle$ 是在 A 的图象中.

逆命题的证明则不这么浅易; 它包含着基于问题 41 的一个窍门. 令 $\mathbf{G}$ 表示 A 的图象, 并考虑由 $B\langle f, Af\rangle=f$ 定义的自 $\mathbf{G}$ 到 $\mathbf{H}$ 的线性变换 B. 很明显, B 是自 $\mathbf{G}$ 到 $\mathbf{H}$ 上的一对一映射; 由于

$$\|B\langle f, Af\rangle\|^2=\|f\|^2\leqslant\|f\|^2+\|Af\|^2=\|\langle f, Af\rangle\|^2,$$

可知 B 是有界的. 由于 $\mathbf{G}$ 是完备空间 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ 的一个闭集, 它也是完备的, 因而应用问题 41 的条件已具备, 结论是, B 是可逆的. 等价地说, 结论就是自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{G}$ 的由 $B^{-1}f=\langle f, Af\rangle$ 的映射 B^{-1} 是一个线性有界变换, 按定义, 这就是说, 对于某一 α(和 $\mathbf{H}$ 中一切 f), 有

$$\|f\|^2+\|Af\|^2\leqslant\alpha\|f\|^2;$$

A 的有界性随之而得.

值得一提的是从问题 41 到上述结果的推导是可逆的; 该问题的断语是闭图象定理的一个特例. 自然, 这个评论对于那些想要知道怎样证明闭图象定理的人并不是特别有助益的, 但它也不仅是告诉我们怎样在闭图象定理及其另一表达形式之间反复循环而已.

解 45. (a) *在不完备内积空间上确有无界对称变换存在.* (b) *在一个希耳伯特空间上, 每一对称线性变换是有界的.*

(a) 令 $\mathbf{H}$ 表示一切有限非 0 无穷序列所构成的复矢量空间, 这就是说, $\mathbf{H}$ 的一个元素就是一个序列 $\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle$, 其中对充分大的 n, $\xi_n=0$, 所谓"充分大"可因序列而异. 按自然的方法定义 $\mathbf{H}$ 中的内积: 如果 $f=\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle$ 而 $g=\langle\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots\rangle$,

令$(f, g)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n^*$. 令 A 表示把每一序列 $\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle$ 映射成 $\langle\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots\rangle$ 的线性变换; A 由一个其对角项序列是 $\langle 1, 2, 3, \cdots\rangle$ 的对角矩阵通过一个明显的方式来确定. 线性变换 A 是对称的; 的确, (Af, g) 和 (f, Ag) 都等于 $\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\eta_n^*$. 线性变换 A 不是有界的; 的确, 如果$\{f_n\}$是一个序列, 其第 n 项是 1 而其它一切项是 0, 则 $\|f_n\|=1$ 而 $\|Af_n\|=n$.

(b) 这是闭图象定理的一个显易的推论. 的确, 如果 A 是对称的, 且设 $f_n\to f$ 而 $Af_n\to f'$, 则对一切 g,

$$(f', g)=\lim_n(Af_n, g)=\lim_n(f_n, Ag)=(f, Ag)=(Af, g),$$

所以 $f'=Af$, 这证明了 A 是闭的, 从而 A 是有界的.

第六章 乘 法 算 子

解 46. 如果 A 是对角算子, $Ae_j=\alpha_j e_j$, 则

$$|\alpha_j|=\|\alpha_j e_j\|=\|Ae_j\|\leqslant\|A\|\cdot\|e_j\|=\|A\|,$$

因此 $\{\alpha_j\}$ 有界且 $\sup_j|\alpha_j|\leqslant\|A\|$. 反向的不等式可由关系式

$$\|A\sum_j\xi_j e_j\|^2=\|\sum_j\alpha_j\xi_j e_j\|^2=\sum_j|\alpha_j\xi_j|^2$$
$$\leqslant(\sup_j|\alpha_j|)^2\cdot\sum_j|\xi_j|^2=(\sup_j|\alpha_j|)^2\cdot\|\sum_j\xi_j e_j\|^2$$

推得.

已给一个有界数族 $\{\alpha_j\}$, 可由 $A\sum_j\xi_j e_j=\sum_j\alpha_j\xi_j e_j$ 定义 A; 从上面的计算可推出 A 是一个算子. 很清楚, A 是一个对角算子, 且 A 的对角线恰是序列 $\{\alpha_j\}$. 唯一性的证明隐含于下述构造中: 通过富里叶展开式, 一个算子在基上的性质确定了它在全空间的性质.

解 47. 如果$\{\alpha_n\}$是一个复数的序列, 使得每当$\sum_n|\xi_n|^2<\infty$, 必有 $\sum_n|\alpha_n\xi_n|^2<\infty$, 则 $\{\alpha_n\}$ 是有界的.

证. 以逆否命题表达, 此断语就是说: 如果 $\{\alpha_n\}$不是有界的,

则存在一个序列 $\{\xi_n\}$ 使得 $\sum\limits_n|\xi_n|^2<\infty$ 但 $\sum\limits_n|\alpha_n\xi_n|^2=\infty$. 此序列的构造法相当简捷. 如果 $\{\alpha_n\}$ 非有界，则 $|\alpha_n|$ 可取任意大的值. 不失一般性，可设 $|\alpha_n|\geqslant n$; 所需处理不过是记号上的一些改变，可能还有某些 α 的省略. 在此假定下，如果 $\xi_n=1/\alpha_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$，则

$$\sum_n|\xi_n|^2\leqslant\sum_n\frac{1}{n^2}<\infty,$$

但 $\sum\limits_n|\alpha_n\xi_n|^2$ 发散.

解 48. 求证断语是，如果 A 是一个具对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子，则 A 与 $\{\alpha_n\}$ 同时是或同时不是可逆的. 的确，如果 $\{\beta_n\}$ 是一个有界序列，使得 $\alpha_n\beta_n=1$ 对一切 n 成立，则具对角线 $\{\beta_n\}$ 的对角算子起 A 的逆的作用. 反过来，如果 A 是可逆的，则 $A^{-1}(\alpha_ne_n)=e_n$，因此

$$A^{-1}e_n=\frac{1}{\alpha_n}e_n;$$

由于 $\|A^{-1}e_n\|\leqslant\|A^{-1}\|$，上式蕴涵序列 $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ 是有界的，从而序列 $\{\alpha_n\}$ 是可逆的.

关于谱，这里的断语是，$A-\lambda$ 是可逆的当且只当 λ 不属于对角线 $\{\alpha_n\}$ 的闭包. (语言纯洁主义者可能会对"对角线的闭包"这一类说法提出异议，因为对角线是复数的序列，所以不能准确地说是一个复数的集; "对角线的闭包"没有严格的意义. 其实这种用法是理应普及的一类"俗语"，它不含糊而且简洁; 如果听任那些语言纯洁主义者使用他们刻板的语言，这将是很遗憾的.) 这断语等价于: $\{\alpha_n-\lambda\}$ 距 0 有界当且只当 λ 不属于 $\{\alpha_n\}$ 的闭包. 其逆否命题: 序列 $\{\alpha_n-\lambda\}$ 以 0 为一个极限点当且只当 $\{\alpha_n\}$ 有一个聚点 λ. 由于这是显然的，证完.

解 49. 如果 A 是由一个 σ- 有限测度空间上的有界可测函数 φ 诱导出的乘法，则 $\|A\|=\|\varphi\|_\infty$ ($=|\varphi|$ 的本性上确界).

证. 令 μ 表示基础测度，先不假定 μ 是 σ- 有限的，看看证明

可进行得多远是有益的；下文在未另行交代前将不假定 σ- 有限性．由于

$$\|Af\|^2=\int|\varphi\cdot f|^2d\mu\leqslant\|\varphi\|_\infty^2\cdot\int|f|^2d\mu=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|^2,$$

可以推知 $\|A\|\leqslant\|\varphi\|_\infty$．在反向不等式的证明中可能会被一种变态性质所烦扰．

可以想到的一种着手证明方法是注意到如果 $\varepsilon>0$，则 $|\varphi(x)|>\|\varphi\|_\infty-\varepsilon$ 在一个正测度集如 M 上成立．如果 f 是 M 的特征函数，则

$$\|f\|^2=\int_M 1\cdot d\mu=\mu(M),$$

且
$$\|Af\|^2=\int_M|\varphi|^2d\mu\geqslant(\|\varphi\|_\infty-\varepsilon)^2\mu(M).$$

由此推知 $\|Af\|\geqslant(\|\varphi\|_\infty-\varepsilon)\|f\|$，从而 $\|A\|\geqslant\|\varphi\|_\infty-\varepsilon$；由于此式对一切 ε 成立，可知 $\|A\|\geqslant\|\varphi\|_\infty$．证明结束了，但它是错误的．

错处在 M 可能有无穷测度．困难和障碍好象不很严重．不管怎样，即使可测集 $\{x:|\phi(x)|\geqslant\|\phi\|_\infty-\varepsilon\}$ 有无穷测度，如果取它的一个有限正测度的可测子集作为 M，上面的推理照样行得通．这是正确的．可是困难在于所论测度空间可以变态到如此程度，以致存在正测度（事实上是无穷测度）的可测集，它的每一个可测子集的测度非 0 即 ∞．这困难无法排除．譬如，X 由两点 x_1 和 x_2 组成，且如 $\mu(\{x_1\})=1$ 而 $\mu(\{x_2\})=\infty$，则 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 就是由 X 上在 x_2 取值 0 的函数全体组成的一维空间．如果 φ 是单元素集 $\{x_2\}$ 的特征函数，则 $\|\phi\|_\infty=1$，但所诱导的乘法算子的范数是 0．

结论：如果测度是局部有界的（其意指每一正测度的可测集有一个有限正测度的可测子集），则每一乘法的范数是乘子的本性上确界；否则至多只能断定不等式 $\|A\|\leqslant\|\phi\|_\infty$ 成立．每一有限或 σ- 有限的测度是局部有限的．避免过度的病态而又（通常）不至于有损普遍性的实际可行的方法是假定（测度）有 σ- 有限性，这样假定之后，解答（叙述如上）就完成了．

解 50． 可测性是容易的．由于测度是 σ- 有限的，存在着一个处处不为 0 的 $\mathbf{L}^2$ 的元素 f；由于 $\varphi\cdot f$ 属于 $\mathbf{L}^2$，它是可测的，随

之它被 f 除的商也是如此.

为了证明有界性,试察

$$\|\varphi^n \cdot f\| = \|A^n f\| \leqslant \|A\|^n \cdot \|f\|$$

对每一正整数 n 成立. 如果 $A=0$, 则 $\varphi=0$, 无须再作证明; 否则记 $\psi=\varphi/\|A\|$, 且重写上面的不等式成下形

$$\int |\psi|^{2n} \cdot |f|^2 d\mu \leqslant \int |f|^2 d\mu$$

(此处 μ 自然是所给的 σ- 有限测度). 由此推知,如果在某正测度集上 $f\neq 0$, 则 $|\psi|\leqslant 1$(这就是说, $|\varphi|\leqslant\|A\|$)在该集上几乎处处成立. 如果(如上)选择 f 使得几乎处处有 $f\neq 0$, 则结论就是 $|\phi|\leqslant \|A\|$ 几乎处处成立.

这个证明是迅捷的,但有些太巧妙了;它不是自然可以想到的一种证法. 一个更自然(且同样迅捷)的方法是:为证 $|\phi|\leqslant\|A\|$ 几乎处处成立, 令 M 表示任一有限测度的可测集, 在此集上 $|\varphi|>\|A\|$, 然后证明 M 必有测度 0. 的确,如果 f 是 M 的特征函数,则或 $f=0$ 几乎处处成立, 或

$$\|Af\|^2 = \int |\varphi \cdot f|^2 d\mu = \int_M |\varphi|^2 d\mu > \|A\|^2 \mu(M) = \|A\|^2 \|f\|^2;$$

而后一个可能性引致矛盾. 可是前一段的证明有一种不能说是人为矫饰的实际好处:与那个较自然的证明不同,它在某一个奇特但有用的情况下仍旧可行. 是这样的情况: 假设 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{L}^2$ 的一个子空间, 假设 $\mathbf{H}$ 上的一个算子 A 使得 $Af=\varphi\cdot f$ 对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 成立,且设 $\mathbf{H}$ 包含一个无处为 0 的函数. 结论,如前: φ 是可测且有界的(以 $\|A\|$ 为界). 证明:如上.

解 51. 如果 φ 是一个复值函数使得每当 $f\in\mathbf{L}^2$, 有 $\varphi\cdot f\in\mathbf{L}^2$(关于一个 σ- 有限测度),则 φ 是本性有界的.

证. 可行的一个方法是推广离散(对角的)构造法(解 47). 如果 φ 不是本性有界的, 则存在一个正有限测度的可测集的不交序列 $\{M_n\}$, 使得每当 $x\in M_n$ 有 $|\varphi(x)|\geqslant n$ (φ 可测的证明无何麻烦; 参看解 50). 定义一个函数 f 如下: 如果对某一 n, $x\in M_n$, 则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\mu(M_n)}\cdot\varphi(x)};$$

否则 $f(x)=0$. 由于

$$\int|f|^2d\mu=\sum_n\int_{M_n}|f|^2d\mu=\sum_n\int_{M_n}\frac{d\mu}{\mu(M_n)|\phi|^2}$$

$$\leqslant\sum_n\int_{M_n}\frac{d\mu}{\mu(M_n)\cdot n^2}=\sum_n\frac{1}{n^2}<\infty,$$

函数 f 属于 $\mathbf{L}^2$; 由于

$$\int|\varphi\cdot f|^2d\mu=\sum_n\int_{M_n}\frac{d\mu}{\mu(M_n)},$$

函数 $\varphi\cdot f$ 不是如此.

另有一个证法: 令 A 表示以 φ 乘 $\mathbf{L}^2$ 的每一元素的线性变换, 并如下证明 A 是闭的. 假设 $\langle f_n, g_n\rangle$ 属于 A 的图象 (即 $g_n=\varphi\cdot f_n$), 并设 $\langle f_n, g_n\rangle\to\langle f, g\rangle$ (即 $f_n\to f$ 且 $g_n\to g$). 不失一般性, 可设 $f_n\to f$ (几乎处处) 且 $g_n\to g$(几乎处处); 如果对序列 $\{f_n\}$说这不成立, 则对其一个适当的子序列说, 它必成立. 由于 $f_n\to f$ (几乎处处), 可知 $\varphi\cdot f_n\to\varphi\cdot f$ (几乎处处); 由于同时有 $\varphi\cdot f_n\to g$ (几乎处处), 可以推知 $g=\varphi\cdot f$ 几乎处处成立, 就是说, $\langle f, g\rangle$ 在 A 的图象中. 结论(由闭图象定理): A 是有界的, 所以(由问题 50)φ 是有界的.

第二种证法值得再看一看. 乘法算子的概念可以有成果地推广到无界乘子上去.

如果 φ 是一个随意的(不必须有界)可测函数, 令 $\mathbf{M}$ 表示 $\mathbf{L}^2$ 中使 $\varphi\cdot f\in\mathbf{L}^2$ 的 f 全体的集 (线性流形). 上面的第二证法证明了映 $\mathbf{M}$ 中每一 f 成 $\varphi\cdot f$ 的(自 $\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{L}^2$ 中的) 线性变换是一个闭变换. (这一类命题是测度论中一个含糊但却是众所周知而且正确的原则在算子理论中的类比. 在测度论中, 可以记下的任何函数是可测的; 在算子理论中, 可以记下的任何变换是闭的.)扼要地说: (有界或非有界的)乘法都是闭的. 然后可以援引闭图象定理以证明: 如果该乘法还以全部 $\mathbf{L}^2$ 为其定义域, 则它必是有界的.

解 52. 对于可逆性: 如果 $\varphi\cdot\psi=1$, 则由 ψ 诱导的乘法算子,

其作用同于 A 的逆. 假设,反过来,A 是可逆的, 这蕴涵 φ 至多只能在一个测度为 0 的集上取值 0(否则取一个 φ 在其上取值 0 且有正有限测度的集的特征函数作为 f). 由于 $\varphi\cdot A^{-1}f=f$, 可以推知每当 $f\in\mathbf{L}^2$, 有 $A^{-1}f=(1/\varphi)\cdot f$. 结论(由解 50): $|1/\varphi|\leqslant\|A^{-1}\|$,所以 $|\varphi|\geqslant 1/\|A^{-1}\|$几乎处处成立.

关于谱的断语可约化为关于可逆性的断语. 初学者宜检查这一约化步骤的全部细节. 本性值域的概念与测度论中其它一些允许在零测度集上任意改动函数值的概念一样, 会使人感到难以驾驭,特别对初次接触者,它常显得是这样的.

解 53. (a) 函数希耳伯特空间上的乘法变换必须是有界的.

证. 根据闭图象定理可得一个证明. 的确, 假设 $\langle f_n, g_n\rangle$在 A 的图象中,$n=1, 2, 3, \cdots$, 且设 $\langle f_n, g_n\rangle\to\langle f, g\rangle$(即 $f_n\to f$ 且 $g_n\to g$). 由于 $\mathbf{H}$ 中的收敛性蕴涵逐点收敛性(如果 $f_n\to f$(强), 则 $f_n\to f$(弱)), 可推知对一切 x,$f_n(x)\to f(x)$ 且 $g_n(x)\to g(x)$. 由于$Af_n=\varphi\cdot f_n$, 又由于对一切 x, $\varphi(x)f_n(x)\to\varphi(x)f(x)$, 可推知 $g=Af$. 结论: A 是闭的, 因此是有界的.

对于(b)的回答不能完全说是"对". 麻烦在于在函数希耳伯特空间的定义中没有什么东西阻止存在这样的点 x, 它使得 $f(x)=0$ 对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 成立. 这样的点可以随意地构成: 已给 $\mathbf{H}$ 和 X,任意扩大 X, 然后扩张 $\mathbf{H}$ 中每一函数使其在新增的点都取值 0. 与此同时,"零点"易于消除正如它们易于产生一样; 可以从 X 中略去它们并把 $\mathbf{H}$ 中每一函数限制到剩余的点集中. 只要有无穷多个零点,无论如何,(b)的回答必须是"否". 理由: X 上的任一函数可以在各零点重加定义使它成为无界的, 而不改变乘以这函数的乘法对 $\mathbf{H}$ 的元素的影响. 对于函数希耳伯特空间说,零点扮演着无穷测度的原子在 $\mathbf{L}^2$ 空间中扮演的角色(参看解 49).

(b) 如果 $\mathbf{H}$ 是一个无零点的函数希耳伯特空间, 则 $\mathbf{H}$ 上每一个乘法(必然是有界的)必是由一个有界乘子诱导的.

证. 注意当 n 是一个正整数且 f 属于 $\mathbf{H}$ 时恒有

$$\|\phi^n\cdot f\|=\|A^n f\|\leqslant\|A\|^n\cdot\|f\|$$

(参看解 50). 如果 $A=0$, 则 $\phi=0$, 无须再作证明; 否则记 $\psi=\phi/\|A\|$, 且改写上面的不等式成下式

$$\|\psi^n\cdot f\|\leqslant\|f\|.$$

由此推知: 如果 $f(x)\neq 0$, 则 $|\psi(x)|\leqslant 1$(亦即 $|\phi(x)|\leqslant\|A\|$). 理由: $(\psi^n\cdot f)(x)$ 以 $\|\psi^n\cdot f\|$ 的某倍数为界. 由于对每一 x, 有一个 f 使得 $f(x)\neq 0$, 可推知 $|\phi|\leqslant\|A\|$ 处处成立.

另有一个证明, 它更具有函数希耳伯特空间常有的风格; 它属于 A. L. Shields. 令 K 表示该空间的核函数(参看问题 30). 由于 $AK_x=\varphi\cdot K_x$ 对每一 x 成立, 又由于同时有, $(AK_x)(y)=(AK_x, K_y)$, 可推知

$$|\varphi(x)K(x, x)|=(AK_x, K_x)\leqslant\|A\|\cdot\|K_x\|^2.$$

由于 $\|K_x\|^2=(K_x, K_x)$, 又由于 $(K_x, K_y)=K_x(y)$ 恒成立, 因而 $\|K_x\|^2=K(x, x)$, 可推知

$$|\varphi(x)K(x, x)|\leqslant\|A\|\cdot|K(x, x)|.$$

关系式 $K(x, y)=K_y(x)=(K_y, K_x)$ 蕴涵"矩阵"K 是正定的, 从而特别有, $|K(x, y)|\leqslant\sqrt{K(x, x)}\sqrt{K(y, y)}$. 由此推知如果对某些 x, 有 $K(x, x)=0$, 则对一切 y 有 $K(x, y)=0$, 即 $K_x=0$, 从而 $f(x)=(f, K_x)=0$ 对一切 f 成立. 零点不存在的假设保证了这不可能发生. 结论: $|\varphi(x)|\leqslant\|A\|$.

本证明用到了关于无须假设是严格正的一次半形式的 Schwarz 不等式. Schwarz 不等式的某些标准证明此时仍然可用; Halmos[1951, p. 15]的证明则否. 问题是要证明, 如果 φ 是一个正对称一次半形式, 则

$$|\varphi(f, g)|^2\leqslant\varphi(f, f)\cdot\varphi(g, g)$$

(两个使用字母的习惯在这里发生了暂时冲突, 字母 φ 在本段中, 与前面不同, 不表示 X 上的一个乘子, 而表示 $\mathbf{H}$ 上一个一次半形式). 为了证明, 令 ϕ_+ 表示同一空间上任意的严格正对称一次半形式, 并对每一正数 ε, 记

$$\phi_\varepsilon=\phi+\varepsilon\phi_+$$

形式 ϕ_ε 是严格正的；对它应用 Schwarz 不等式并令 $\varepsilon\to 0$. 至于(在每一实或复矢量空间上)求一个严格正形式 ϕ_+，只须用 Hamel 基. 如果$\{e_j\}$是一个 Hamal 基，记 $\varphi_+(\sum_j \alpha_j e_j,\ \sum_j \beta_j e_j)=\sum \alpha_j\beta_j^*$. 此和式形式上是无穷的但仅有限项非 0.

关于 Schwarz 不等式的这些讨论是离了题，但却是有趣的；这里再补充一点. 对内积（严格正形式）的 Schwarz 不等式的证明只包含一行的验证，就是

$$\|f\|^2\cdot\|g\|^2-|(f,\ g)|^2=\frac{1}{\|g\|^2}\|\|g\|^2f-(f,\ g)g\|^2.$$

如以 $\|g\|^2$ 乘全式使得结果当 $g=0$ 时仍成立，可能更漂亮，但该等式当取上面所给形式时显得更加明洁. 这一行还证明了，如果不等式退化为等式，则 f 与 g 线性相关. 逆定理是不足道的；如果 f 与 g 线性相关，则它们中有一是另一的数量倍，例如 $g=\alpha f$，于是 $|(f,\ g)|^2$ 和$(f,\ f)\cdot(g,\ g)$都等于 $|\alpha|^2(f,\ f)^2$.

解 54. 令 $\mathbf{H}$ 表示 $[0,\ 1]$ 上一切其导函数属于 $\mathbf{L}^2$ 的绝对连续（复值）函数全体的集；$\mathbf{H}$ 的内积由$(f,\ g)=f(0)g(0)^*+\int_0^1 f'(x)g'(x)^*dx$ 定义，如果$\|f\|=0$，则 $\int_0^1|f'(x)|^2dx=0$，于是几乎处处有 $f'(x)=0$，因此 f 是一个常数；可是 $f(0)=0$，由此知 $f=0$. 这证明了这内积是严格正的. 如果$\{f_n\}$是 $\mathbf{H}$ 中哥西序列，则 $\{f_n(0)\}$ 是数值的哥西序列而 $\{f_n'\}$ 是 $\mathbf{L}^2$ 中哥西序列. 由此推知对某一复数 α 和 $\mathbf{L}^2$ 中某一g，$f_n(0)\to\alpha$ 且 $f_n'\to g$. 置 $f(x)=\alpha+\int_0^x g(t)dt$，便得一个 f，使得 $f_n\to f$（在 $\mathbf{H}$ 中）. 这证明了 $\mathbf{H}$ 是完备的. 如果 $0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$|f(x)|^2=|f(0)+\int_0^x f'(t)dt|^2$$

$$\leqslant 2(|f(0)|^2+\int_0^1|f'(t)|^2dt)=2\|f\|^2;$$

这证明了计值泛函是有界的，从而 $\mathbf{H}$ 是一个函数希耳伯特空间.

如果 f 和 g 属于 $\mathbf{H}$，则 f 和 g 是有界的；由此知 $(fg)'(=fg'+f'g)$ 属于 $\mathbf{L}^2$ 从而 $fg\in\mathbf{H}$. 由于 1 显然属于 $\mathbf{H}$，一切要求都已满足.

本例属于 A. L. Shields.

第七章 算 子 矩 阵

解 55. 记 $\Delta=AD-BC$. 如果 Δ 是可逆的，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} D\Delta^{-1} & -B\Delta^{-1} \\ -C\Delta^{-1} & A\Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

的乘积，不论次序如何，都是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

这证明了条件的充分性(注意在这一段中，0 与 1 不是数而是某一合适的希耳伯特空间的算子).

现在假设

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

是可逆的，从而特别是下有界的. 这意味着

$$\|Af+Bg\|^2+\|Cf+Dg\|^2\geqslant\delta(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

对某正数 δ 成立. 这个关系式有两个特例可以有用地结合起来首先，令 $\langle f, g\rangle$ 的两坐标中之一等于 0(另一坐标都称为 f)，得

$$\|Af\|^2+\|Cf\|^2\geqslant\delta\|f\|^2,$$

$$\|Bf\|^2+\|Df\|^2\geqslant\delta\|f\|^2.$$

其次，取 $\langle Df, -Cf\rangle$ 和 $\langle -Bf, Af\rangle$ 代替 $\langle f, g\rangle$ (试与逆算子表达式中的两列比较)，得

$$\|(AD-BC)f\|^2\geqslant\delta(\|Cf\|^2+\|Df\|^2),$$

$$\|(AD-BC)f\|^2\geqslant\delta(\|Af\|^2+\|Bf\|^2).$$

后面一对不等式相加，除以 2，联系前面一对不等式，即得

$$\|(AD-BC)f\|^2\geqslant\delta\|f\|^2.$$

结论：$AD-BC$ 是下有界的.

由于 A, B, C 与 D 两两可交换, A^*, B^*, C^* 与 D^* 也是如此，由于

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆, 伴随矩阵

$$\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$$

也是如此, 前段的结果蕴涵 $A^*D^*-B^*C^*$ 下有界, 从而其核是平凡的, 这又蕴涵 $AD-BC$ 的值域是稠密的.

由于 $AD-BC$ 下有界且有稠值域可知 $AD-BC$ 是可逆的，证完.

解 56. 由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

恒为可逆, 其逆为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix},$$

可推知 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$

同时为可逆或否. 此乘积算出来就是

$$\begin{pmatrix} A+BT & B \\ C+DT & D \end{pmatrix};$$

令 $T=-D^{-1}C$, 可得结论：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆当且只当

$$\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

可逆.

暂引入缩写记号 $E=A-BD^{-1}C$ 并进而考虑

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

的可逆性. D 是可逆的假设仍然有效, 如果 E 也是可逆的, 则

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

也是如此,其逆为

$$\begin{pmatrix} E^{-1} & -E^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

逆命题也是真的:如果

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

可逆,则 E 也是如此,证明只需一个简单计算. 假设

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

是

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

之逆;则

$$\begin{pmatrix} PE & PB+QD \\ RE & RB+SD \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} EP+BR & EQ+BS \\ DR & DS \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $DR=0$ 而 D 可逆,可知 $R=0$;由于 $PE=1$ 且 $EP+BR=1$,可知 E 可逆(且事实上 $E^{-1}=P$).

现在把缩写复原,便得结论:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆当且只当 $A-BD^{-1}C$ 可逆. 由于 D 是可逆的, 乘以 D 的乘法不影响有关可逆性的任何命题;由此推知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆当且只当 $AD-BD^{-1}CD$ 可逆. 直到此时, 不需要所假定的

C 和 D 的可交换性；现在，它介入了，它使命题更适合我们的意图。由于 C 与 D 可交换，推知 C 与 D^{-1} 可交换，从而 $BD^{-1}CD=BC$。结论：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆当且只当 $AD-BC$ 可逆。

假设条件的不对称性（为什么 C 与 D？又为什么 D^{-1}？）并不象初看时那么不顺眼。关键点在于结论也有相同程度的不对称性。为什么(1) $AD-BC$ 有这个特权，而 (2) $DA-BC$，或(3) $DA-CB$，或 (4) $AD-CB$ 没有这个特权呢？要恢复对称性，不必改变命题，而是去扩大它所包含的内容。本定理只是四个定理中的一个。要得到包含形式行列式的一切可能形式的结论，可以假定 D 可逆并假设(1) $\mathbf{C}$ 与 D 或 (2) $\mathbf{B}$ 与 D 可交换，或从另一方面假定 A 可逆并假设 (3) A 与 B 或 (4) A 与 C 可交换。

如果基础希耳伯特空间是有限维的，则可逆算子在算子全体所成的距离空间中稠密，这是众所周知且是显然的。这个评注（与上面已证的结果一起）蕴涵在有限维情形下本问题中可逆性的假设是多余的：如果 C 与 D 可交换，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆的一个充要条件是 $AD-BC$ 可逆。证明方法是去证明一个更强的命题：由于乘上

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

不仅不改变算子的可逆性，也不改变对应的行列式的数值，所以我们可以证明

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det(AD-BC).$$

关于反例，可以在 l^2 中有效地找到它们。由

$$A\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle$$

和 $D\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$

定义 A 和 D,并置 $B=C=0$. 由此得 $AD-BC=1$,但

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

有一个非平凡核(观察 $\langle f, g\rangle$, 此处 $f=\langle 1, 0, 0, \cdots\rangle$ 而 $g=0$).

如果,另一方面,B 由

$$B\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle\xi_0, 0, 0, 0, \cdots\rangle,$$

定义,则
$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

可逆,其逆为
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix},$$

但形式行列式 DA 则有一个非平凡核.

解 57. 先从一个具有独立意义的引理开始似较为方便:如果一个有限维子空间在一个可逆算子下是不变的,则它在其逆算子下也是不变的(有简易的例子说明有限维的假定在这里是不可少的). 为了避免引入更多的记号,令 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ 表示所说的空间,$\mathbf{H}$ 表示所说的子空间,而 M 表示算子. ($\mathbf{H}$ 固然不真的是 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{K}$ 的一个子空间,但是只要通过一个明显的等同映射,它就变成一个这样的子空间.)由于 $M\mathbf{H}\subset\mathbf{H}$, 又由于(据可逆性)$M$ 保持线性无关性,可推知 $\dim M\mathbf{H}=\dim\mathbf{H}$, 由此(由有限维性)$M\mathbf{H}=\mathbf{H}$. 这蕴涵 $M^{-1}\mathbf{H}=\mathbf{H}$,而引理的证明已告完成.

这引理适用于我们手边的情形. 如果

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{H}$ 在 M 下不变;由引理推知如果 M 是可逆的,则 M^{-1} 具有

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$$

的形式. 有限维性到此已经起了它的作用;以下的推理是普遍有效的. 一旦知道一个三角矩阵有一个三角矩阵的逆,则不管它的

元素是多大的[注]，该矩阵的每一对角元素都是可逆的，且其逆即逆矩阵的对应元素．证明：按两种可能的次序将两矩阵相乘然后观察其结果．

第八章 谱的性质

解 58. 如果 A 是一个算子，则 $\Pi_0(A^*)=\Gamma(A)^*$ 且 $\Pi(A^*)\cup\Pi(A)^*=\Lambda(A^*)$．

证. 如果 $\lambda\in\Pi_0(A^*)$，则 $A^*-\lambda$ 有非零核，所以 $A-\lambda^*$ 的值域有非零的正交补；这两个蕴涵关系都是可逆的．

第二方程是关于 Π 与共轭性间的关系所能说的最好结果．这断语就是说，如果 $A^*-\lambda$ 不是可逆的，则 $A^*-\lambda$ 和 $A-\lambda^*$ 中之一不是下有界的．等价地说(记号要做一个明显的改变)，只须证明如果 A^* 与 A 两者都是下有界的，则 A^* 是可逆的．证明是显易不足道的：如果 A 下有界，则其核是平凡的，因此 A^* 的值域稠；这一点，连同 A^* 下有界的假定，蕴涵 A^* 是可逆的．(这个推理曾经在证明现在这个断语的一个特殊情形时用过；参看解 55.)

系. $\Pi_0(A)=\Gamma(A^*)^*$ 且 $\Pi(A)\cup\Pi(A^*)^*=\Lambda(A)$．

证. 以 A^* 代替 A．

解 59. 如果 A 是算子且 p 是多项式，则 $\Pi_0(p(A))=p(\Pi_0(A))$，$\Pi(p(A))=p(\Pi(A))$，且 $\Gamma(p(A))=p(\Gamma(A))$；如果 A 是一个可逆算子且对 $z\neq0$ 有 $p(z)=1/z$，则同样诸方程也成立．

证. 在实际开始证明之前宜先进行三个初等的观察．如果有限个算子的乘积(1) 有非 0 核，或(2) 非下有界或(3) 有非稠的值域，则至少有一个因子必有同样的性质．如果两因子可交换，则每一命题的逆命题也成立．证明的思想从下列诸句子可能会得到最好的启示．如果 AB 映射 (1) 一个非零矢量成 0，或(2) 一个单位矢量序列成为一个趋于零的序列，则从右向左进行推理：如果 B 不曾这样做，则 A 必须这样．(3) 如果 AB 的值域非稠，自左向右

[注] 指不论它是维数多大的空间上的算子或变换．——译者注

进行推理:如果 A 的值域稠,则 B 的值域必非稠.

现在讨论谱映射定理的证明,不失一般性,假定多项式 p 有正的次数且首项系数为1.由于 $p(\lambda)-p(\lambda_0)$ 被 $\lambda-\lambda_0$ 整除,据(1)[注]可推知,如果 $\lambda_0\in\Pi_0(A)$,则 $p(\lambda_0)\in\Pi_0(p(A))$,从而 $p(\Pi_0(A))\subset\Pi_0(p(A))$.(这一部分如下证明简单得多:如果 $Af=\lambda_0 f$,则 $p(A)f=p(\lambda_0)f$. 上面较长的证法则也可适用于其它情形,所以稍后可节省时间.)如果,另一方面,$\alpha\in\Pi_0(p(A))$,则将 $p(\lambda)-\alpha$ 表示成类如 $\lambda-\lambda_0$ 的因子的乘积,并应用(1);结论是对 $\Pi_0(A)$ 中某数 λ_0 有 $\alpha=p(\lambda_0)$. 这意味着 $\alpha\in p(\Pi_0(A))$,从而 $\Pi_0(p(A))\subset p(\Pi_0(A))$. 对 Π 和 Γ 的论证恰同上述,只须用(2)或(3)代(1).另一备择方法可用于 Γ:应用关于 Π_0 的结果于 A^*,求共轭,再应用解 58.

现在转到倒数. 如果 A 是可逆的且 $Af=\lambda f$,其中 $f\neq 0$,则 $\lambda\neq 0$. 施行 A^{-1} 于方程的两边,除以 λ,得到

$$A^{-1}f=\frac{1}{\lambda}f.$$

结论:

$$\frac{1}{\Pi_0(A)}\subset\Pi_0(A^{-1}).$$

以 A^{-1} 代 A,再取倒数,便得反向的包含式. 用相同方法,且从 $Af_n-\lambda f_n\to 0$, $\|f_n\|=1$ 开始,便得倒数的关于 Π 的谱映射定理. 应用关于 Π_0 的结果于伴随算子可导出关于 Γ 的结果.

解 60. (1) 如果 $A-\lambda$ 可逆,则 $P^{-1}(A-\lambda)P=P^{-1}AP-\lambda$ 也如此.

(2) 如果 $Af=\lambda f$,则 $P^{-1}AP(P^{-1}f)=\lambda(P^{-1}f)$.

(3) 如果 $Af_n-\lambda f_n\to 0$,这里的 $\|f_n\|=1$,则 $P^{-1}AP(P^{-1}f_n)-\lambda(P^{-1}f_n)=P^{-1}(Af_n-\lambda f_n)\to 0$. 诸范数 $\|P^{-1}f_n\|$ 在下方以 $1/\|P\|$ 为界,而因此,以 $\|P^{-1}f_n\|$ 为除式行除法,不影响收敛于0的收敛性. 这蕴涵

$$P^{-1}AP\left(\frac{P^{-1}f_n}{\|P^{-1}f_n\|}\right)-\lambda\left(\frac{P^{-1}f_n}{\|P^{-1}f_n\|}\right)\to 0.$$

[注] 此处应为:据(1)的逆命题,…. ——译者注

(4) 如果 g 属于 $P^{-1}AP-\lambda(=P^{-1}(A-\lambda)P)$ 的值域，则 g 属于 $A-\lambda$ 的值域在 P^{-1} 下的象；这蕴涵如果 $A-\lambda$ 的值域的闭包不是 $\mathbf{H}$，则 $P^{-1}(A-\lambda)P$ 的值域的闭包也不是 $\mathbf{H}$.

刚给出的四个证明指明 A 的谱的每一指名的部分包含于 $P^{-1}AP$ 的(谱的)对应部分．在这个断语中，以 $P^{-1}AP$ 和 P^{-1} 分别取代 A 与 P，便得到该断语的逆.

解 61. 待证的是，如果 $\lambda\neq0$，则 $AB-\lambda$ 与 $BA-\lambda$ 同为可逆或同为不可逆．除以 $-\lambda$ 就把定理约化成一般的环论断语．如果 $1-AB$ 可逆，则 $1-BA$ 也如是．这个断语的证明思路可自下面的假定得到启发，即假定 $1-AB$ 的逆，表以 C，可写成下式 $1+AB+ABAB+\cdots$，类似地，假定 $1-BA$ 的逆是 $1+BA+BABA+\cdots=1+B(1+AB+ABAB+\cdots)A=1+BCA$．但这不算证明，证明本身包含着验证：如果

$$C(1-AB)=(1-AB)C=1,$$

则 $$(1+BCA)(1-BA)=(1-BA)(1+BCA)=1.$$

验证是简捷的．如果把关于 C 的假定改写成

$$CAB=ABC=C-1,$$

就更易于看出结论.

解 62. 对每一算子 A 说，近似点谱是闭的.

证. 从证明 $\Pi(A)$ 的余集是开的着手较为方便．如果 λ_0 不属于 $\Pi(A)$，则 $A-\lambda_0$ 下有界；譬如说，对一切 f 有

$$\|Af-\lambda_0 f\|\geqslant\delta\|f\|.$$

由于对一切 λ，

$$\|Af-\lambda_0 f\|\leqslant\|Af-\lambda f\|+\|\lambda f-\lambda_0 f\|,$$

可以推知 $$(\delta-|\lambda-\lambda_0|)\|f\|\leqslant\|Af-\lambda f\|.$$

这蕴涵，如果 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小，则 $A-\lambda$ 下有界.

解 63. 证明下列稍为一般的断语是方便的（但不是必须如此）：如果 $\{A_n\}$ 是一个可逆算子序列，又若 A 是一个非可逆算子，使得当 $n\to\infty$ 时 $\|A_n-A\|\to0$，则 $0\in\Pi(A)$．由于 A 不是可逆的，或 $0\in\Pi(A)$ 或 $0\in\Gamma(A)$．如果 $0\in\Pi(A)$，不须再证明什么．因

此只须证明在 $\operatorname{ran} A$ 非稠的假定下，A 不是下有界的(即 $0\in\Pi(A)$)就够了．于此，假设 f 是一个正交于 $\operatorname{ran} A$ 的非零矢量，并记

$$f_n=\frac{A_n^{-1}f}{\|A_n^{-1}f\|}.$$

由于 $\|f_n\|=1$，可推知 $\|(A_n-A)f_n\|\leqslant\|A_n-A\|\to 0$．可是 $Af_n\in\operatorname{ran} A$，且 $A_nf_n\perp\operatorname{ran} A$，由此知

$$\|A_nf_n-Af_n\|^2=\|A_nf_n\|^2+\|Af_n\|^2\geqslant\|Af_n\|^2,$$

从而 $\|Af_n\|\to 0$．

为了导出原来的关于谱的断语，假设 λ 是在 $\Lambda(A)$ 的边界上，由此知存在不属于 $\Lambda(A)$ 的数 λ_n 使得 $\lambda_n\to\lambda$．算子 $A-\lambda_n$ 是可逆的而 $A-\lambda$ 则否；由于

$$\|(A-\lambda_n)-(A-\lambda)\|=|\lambda_n-\lambda|\to 0,$$

可从前段推知 $\lambda\in\Pi(A)$．

第九章 谱 的 例

解 64． 正规性告诉我们，对每一矢量 f，有 $\|Af\|=\|A^*f\|$．由此推知对每一 λ，有 $\|(A-\lambda)f\|=\|(A^*-\lambda^*)f\|$，从而 $\Pi_0(A)=(\Pi_0(A^*))^*$．从解 58 即得结论．

解 65． 如果 A 是对角算子，则 $\Pi_0(A)$ 和 $\Gamma(A)$ 都等于对角线，且 $\Pi(A)(=\Lambda(A))$ 是对角线的闭包．

证．假设 $\{e_j\}$ 是一个就范正交基，使得 $Ae_j=\alpha_je_j$．第一断语说的是，一个数是 A 的一个特征值当且只当它等于诸 α_j 之一．“当”是不足道的：每一 α_j 是 A 的一个特征值．据一个明显的减法，“只当”等价于：如果 A 有非 0 核，则诸 α_j 中至少有一个为零．取逆否命题：如果对一切 j 有 $\alpha_j\neq 0$，则 $Af=0$ 蕴涵 $f=0$，的确：如果 $f=\sum_j\xi_je_j$，则 $Af=\sum_j\alpha_j\xi_je_j$，因此 $Af=0$ 等价于对一切 j 有 $\alpha_j\xi_j=0$；由于没有一个 α_j 为零，每一个 ξ_j 都得等于零．

现在 $\Pi_0(A)$ 已知，就可应用问题 64 的结果．由于对角算子是正规的，可推知 $\Gamma(A)$ 也等于对角线，且近似点谱与全谱相同．

解 66. 如果 A 是由(在 σ- 有限测度空间上的)乘子 φ 诱导出的乘法,则 $\Pi_0(A)$ 与 $\Gamma(A)$ 两者都等于使 $\varphi^{-1}(\{\lambda\})$ 有正测度的那些复数 λ 的集,且 $\Pi(A)$ $(=\Lambda(A))$ 是 φ 的本性值域.

证. 如果 $f\in\mathbf{L}^2$ 且 $\varphi(x)f(x)=\lambda f(x)$ 几乎处处成立,则当 $f(x)\neq 0$ 时,必有 $\varphi(x)=\lambda$. 这蕴涵,为使 λ 是 A 的一个特征值,函数 φ 必在一个正测度集上取 λ 为值. 如果,反之,在一个正测度集 M 上 $\varphi(x)=\lambda$,又若 f 是 M 的一个正有限测度子集的特征函数,则 $f\in\mathbf{L}^2$, $f\neq 0$ 而且 $Af=\lambda f$,因此 λ 是 A 的一个特征值.

剩下的断语可以如同解 65 中那样给予证明.

解 67. 如果 U 是单侧移位,则 $\Lambda(U)=D$(=闭单位圆域), $\Pi_0(U)=\emptyset$, $\Pi(U)=C$(=单位圆),且 $\Gamma(U)=D-C$(=单位圆域的内部). 对其伴随算子说: $\Lambda(U^*)=D$, $\Pi_0(U^*)=D-C$, $\Pi(U^*)=D$,且 $\Gamma(U^*)=\emptyset$.

证. 同时处理 U 和 U^* 是明智的,每一算子提供关于另一算子的信息. 要研究 U^*,不论单独地或与 U 一起,该知道它到底是什么样的算子. 由于(对 i, $j=0, 1, 2, \cdots$)

$$(U^*e_i,\ e_j)=(e_i,\ Ue_j)=(e_i,\ e_{j+1})=\delta_{i,j+1},$$

可知

$$U^*e_0=0;$$

如果 $i>0$,则

$$\delta_{i,j+1}=\delta_{i-1,j}=(e_{i-1},\ e_j),$$

所以

$$U^*e_i=e_{i-1}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

这结果用坐标表示就是

$$U^*\langle\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\rangle=\langle\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots\rangle.$$

U 的函数表示(即把它表示为 $\mathbf{H}^2$ 上的乘法)有其欺骗性;由于乘法算子的伴随算子是乘以复共轭函数的乘法,这会引人想到如果 $f\in\mathbf{H}^2$,则 $(U^*f)(z)=z^*f(z)$. 这不但是错误的,而且是无意义的; $\mathbf{H}^2$ 在以 e_{-1} 乘的乘法下不是不变的. 求伴随与求共轭间的对应性对 $\mathbf{L}^2$ 说是行得通的,但没有理由假定它对 $\mathbf{L}^2$ 的一个子空间也行得通. 在 $\mathbf{H}^2$ 上 U^* 的正确表达式是

$$(U^*f)(z)=z^*(f(z)-(f,\ e_0)).$$

现在考虑谱及其各部分. 由于U是一个等距算子, 因此$\|U\|=1$, 由此推知U的谱包含于闭单位圆域中, 从而这对U^*也成立.

如果$Uf=\lambda f$, 这里的$f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$, 则

$$\langle 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle=\langle\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots\rangle.$$

因此$0=\lambda\xi_0$, 且对一切n有$\xi_n=\lambda\xi_{n+1}$. 这蕴涵对一切n有$\xi_n=0$(分别察看$\lambda=0$和$\lambda\neq 0$的情况), 从而$\Pi_0(U)=\emptyset$. 推论: $\Gamma(U^*)=\emptyset$.

U没有特征值这一点, 有另一可供选择的证明, 它有一些几何方面的优点. 如果f是属于非0特征值的一个特征矢, 则对每一正整数n, f属于$\operatorname{ran} A^n$, 这是不足道的事实, 对于每一算子A成立(用归纳法证明, $n=0$时是不足道的; 如果$f=A^n g$, 则$f=(1/\lambda)\times Af=(1/\lambda)A^{n+1}g$). U^n的值域由正交于一切e_j, $0\leqslant j<n$, 的一切矢量组成, 随之有, $\bigcap_n \operatorname{ran} U^n$仅含0. 这证明了$U$没有不同于0的特征值. U的等距性质, 即如果$Uf=0$, 则$0=\|Uf\|=\|f\|$, 排除了特征值0.

如果$U^*f=\lambda f$, 则

$$\langle\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\rangle=\langle\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots\rangle,$$

因此对一切n, 有$\xi_{n+1}=\lambda\xi_n$或$\xi_{n+1}=\lambda^n\xi_0$. 如果$\xi_0=0$, 则$f=0$; 否则所得诸ξ是一个矢量的坐标(即它们是平方可和的)的一个充要条件是$|\lambda|<1$. 结论: $\Pi_0(U^*)$是开单位圆域(随之, $\Gamma(U)$是开单位圆域). 这个圆域中的每一λ是U^*的一个简单特征值(即它有重数1); 对应的特征矢f_λ(规范化使$(f_\lambda, e_0)=1$)由

$$f_\lambda=\langle 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\rangle$$

给出.

由于谱是闭的, 可推知$\Lambda(U)$和$\Lambda(U^*)$都包含闭单位圆域, 从而它们就等于它, 剩下的就只有求$\Pi(U)$和$\Pi(U^*)$了. 由于每一算子的谱的边界包含于近似点谱, 可推知$\Pi(U)$和$\Pi(U^*)$都包含单位圆. 如果$|\lambda|<1$, 则对一切f, 有

$$\|Uf-\lambda f\|\geqslant|\|Uf\|-\|\lambda f\||=|1-|\lambda||\cdot\|f\|,$$

因此$U-\lambda$下有界, 这证明了$\Pi(U)$恰就是单位圆. 对U^*的情

况有所不同：由于 Π_0 恒包含于 Π，又由于 $\Pi_0(U^*)$ 是开单位圆域，可推知 $\Pi(U^*)$ 就是闭单位圆域.

解 68. 如果 W 是双侧移位，则 $\Lambda(W)=C$（= 单位圆），$\Pi_0(W)=\emptyset$，$\Pi(W)=C$，且 $\Gamma(W)=\emptyset$. 同样诸方程对伴随算子 W^* 成立.

证. W 的谱以及这个谱的精密结构可遵循单侧移位 U 的研究中指明的模式来确定（解 67），但还有另外的方法，一个更好的方法来确定它. 对应于 U 在 $\mathbf{H}^2$ 上的函数表示；双侧移位 W 在 $\mathbf{L}^2(\mu)$（这里的 μ 是单位圆上就范勒贝格测度，参看问题 26）上有一自然的函数表示. 由于由 $e_n(z)=z^n(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 定义的诸函数 e_n 形成 $\mathbf{L}^2$ 的就范正交基，又由于移前一个指标对它们的作用同于乘以 e_1，可推知双侧移位同于 $\mathbf{L}^2$ 上由

$$(Wf)(z)=zf(z)$$

定义的乘法算子. 这解决了关于 W 的所有问题，一切由解 66 推得.

至于 W^*，它的研究可约化为 W 的研究. 的确，由于 W 是酉算子，它的伴随算子同于它的逆. W^{-1} 的计算毫不费力；很清楚，W^{-1} 向后移位，正如 W 向前移那样. 在 W 与 W^* 之间有一完全的对称性；要从其一得到其它，只要用 $-n$ 置换 n. 用更学究式的语言说：W 与 W^* 是酉等价的，特别地，由条件 $Re_n=e_{-n}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 确定的酉算子 R 把 W 变换成 W^*（即 $R^{-1}WR=W^*$）. 结论：W^* 的谱等于 W 的谱，且同命题对于谱的每一通常部分，部分对部分地，也是真的.

解 69. 首先假设 A^* 的特征矢张成 $\mathbf{H}$. 令 X 表示一个指标集，X 中每一 x，有 A^* 的一个特征矢 K_x 与之对应且诸 K_x 张成 $\mathbf{H}$；以 $\varphi(x)^*$ 标记对应于 K_x 的特征值（共轭在这里没有什么深奥的意义；它不过是为了记号上的方便）. 由此知 $A^*K_x=\varphi(x)^*\times K_x$. 对 $\mathbf{H}$ 中每一 f，令 $\tilde{f}$ 表示 X 上的由 $\tilde{f}(x)=(f, K_x)$ 定义的函数. 对应 $f\to\tilde{f}$ 是线性的. 如果 $\tilde{f}=0$，即若对一切 x 有 $(f, K_x)=0$，则 $f=0$（由于诸 K_x 张成 $\mathbf{H}$）. 这肯定了定义 $(\tilde{f}, \tilde{g})=$

(f, g)的合理性. 以此为内积定义, 形如$\tilde{f}$(对应于$\mathbf{H}$中的f)的函数全体的集$\tilde{\mathbf{H}}$成为一个函数希耳伯特空间. [注意: $|\tilde{f}(x)| = |(f, K_x)| \leqslant \|f\| \cdot \|K_x\| = \|\tilde{f}\| \cdot \|K_x\|$.] 令$\tilde{A}$表示A在同构对应$f \to \tilde{f}$下的象(就是说, $\tilde{A}\tilde{f} = (Af)^\sim$; 则

$$(\tilde{A}\tilde{f})(x) = (Af)^\sim(x) = (Af, K_x) = (f, A^*K_x)$$
$$= (f, \varphi(x)^*K_x) = \varphi(x)(f, K_x) = \varphi(x)\tilde{f}(x),$$

于是$\tilde{A}$确是一个乘法.

逆定理的证明可以返溯上面的计算步骤. 详细地说, 如果A是一个具定义域X和核函数K的函数希耳伯特空间$\mathbf{H}$上的乘法(譬如说具乘子φ), 因而$(Af)(x) = \varphi(x)f(x)$, 则$(Af, K_x) = \varphi(x)(f, K_x)$ (这里的$K_x(y) = K(y, x)$), 所以对一切f有$(f, A^*K_x - \varphi(x)^*K_x) = 0$. 由此推知$A^*K_x = \varphi(x)^*K_x$; 由于在函数希耳伯特空间中诸$K_x$的集恒张成全空间, 证完.

试将这构造法与关于单侧移位的已知知识(解 67)比较.

解 70. 单侧移位的相对谱是单位圆.

证. 可使证明依赖于两个简单的引理. (1) 对一个具平凡核的算子说, 相对可逆性同于左可逆性. (2)对一切算子, 左可逆性同于下有界性.

(1) 的证明在一个方向说是不足道的; 左可逆性恒蕴含相对可逆性. 为证逆命题, 假设$ABA = A$, 因而$A(1 - BA) = 0$. 如果A的核是平凡的, 则可推知$1 - BA = 0$, 从而A是左可逆的.

为证 (2), 假设A是左可逆的, 譬如说$BA = 1$; 可推知对每一f, 有$\|f\| = \|BAf\| \leqslant \|B\| \cdot \|Af\|$, 从而$A$是下有界的. 如果, 反之, A是下有界的, 则映射A有唯一确定的逆映射B, 它把A的(闭)值域射到全空间上. 映射B是有界线性变换; 可扩张它成一个(全空间上的)算子, 例如可在A的值域的正交补上定义其值为0. 扩张了的B就是A的一个左逆算子.

引理(1)和(2)蕴涵, 如果一个算子的点谱是空的, 则对该算子说, 相对谱等于近似点谱, 对于单侧移位的断语现在已不言自明(参看解 67).

解 71. 如果 A 是希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的算子，如果 α 是一个非 0 数量，又如 M 是算子矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix},$$

则 M 是相对可逆的充要条件是 A 也是如此。

见于 M 中的数量 α 和 1 应理解为 $\mathbf{H}$ 上的算子。

证. 首先假设 M 是相对可逆的．如果

$$N=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

是 M 的相对逆，就是说，如果 $MNM=M$，则 $\alpha QA=0$且 $QA+ASA=A$(完成所指出的乘法，然后看乘积的第二列)．由于$\alpha\neq 0$，可推知 $QA=0$ 从而 $ASA=A$；这证明了 A 相对可逆． 逆命题是另一容易的计算：如果 A 是相对可逆的，譬如说 $ABA=A$，则可置

$$N=\begin{pmatrix} (1/\alpha)AB & 1-AB \\ -(1/\alpha)B & B \end{pmatrix},$$

并验证 $MNM=M$.

刚才证明的结果蕴涵存在着相对谱非闭的算子．要证明这一点，看一看 $\alpha=0$ 的情形是合适的．

事实是，如果

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix},$$

则不论 A 如何 M 是相对可逆的．理由：记

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可验证 $MNM=M$.

前面两段合在一起蕴涵：算子矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & A \end{pmatrix}$$

的相对谱几乎与算子 A 的相对谱相同；它们间仅可能在单个数 1 处有差异．更准确地说：如果 M 和 A 的相对谱分别是 Φ 和 Ψ，则

$\Phi=\Psi-\{1\}$. 这接着又蕴涵,如果选择 A,使其相对谱包含 1 作为一个聚点,则 M 的相对谱非闭. 作为一个具体的例,令 A 表示单侧移位,参看解 70.

第十章　谱　半　径

解 72.　证明算子函数解析性的标准技巧是恒等式

$$(1-A)^{-1}=1+A+A^2+\cdots.$$

如果 $\|A\|<1$, 则此级数(关于算子范数)收敛, 且通过一些明显的代数演算可证明它的和的确有如同 $1-A$ 的逆一样的作用(以 $1-A$ 代 A, 得断语: 如果 $\|1-A\|<1$, 则 A 可逆. 参看 Halmos[1951, 52 页]; 并参看问题 83).

现在假设 λ_0 不在 A 的谱中, 因此 $A-\lambda_0$ 可逆. 为证 $(A-\lambda)^{-1}$ 对于在 λ_0 附近的 λ 是解析的, 可用 $A-\lambda_0$ 表示 $A-\lambda$:

$$\begin{aligned}A-\lambda&=(A-\lambda_0)-(\lambda-\lambda_0)\\&=(A-\lambda_0)(1-(A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0)).\end{aligned}$$

如果 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小, 则 $\|(A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\|<1$, 而级数技巧可以应用. 结论是, 如果 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小, 则 $A-\lambda$ 可逆, 且

$$(A-\lambda)^{-1}=(A-\lambda_0)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}((A-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0))^n.$$

由此推知如果 f 和 g 在 $\mathbf{H}$ 中, 则在 λ_0 的某邻域中有

$$(\rho(\lambda)f,\ g)=\sum_{n=0}^{\infty}((A-\lambda_0)^{-n-1}f,g)(\lambda-\lambda_0)^n,$$

从而 ρ 在 λ_0 解析.

至于 $\lambda=\infty$, 注意当 $\lambda\neq0$ 时恒有

$$A-\frac{1}{\lambda}=-\frac{1}{\lambda}(1-\lambda A),$$

从而当 $|\lambda|$ 充分小(但异于 0)时, $A-\dfrac{1}{\lambda}$ 是可逆的. 由于

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left(A-\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}=-\lambda(1-\lambda A)^{-1},$$

级数技巧可以再用:

$$\tau(\lambda)=\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-\lambda(1+\lambda A+\lambda^2A^2+\cdots).$$

括号中的级数对于小的 λ 收敛，而括号前面的因子 $-\lambda$ 保证 $\tau(0)=0$.

解 73. 用引出矛盾法进行．如果 A 的谱是空的，则 $(\rho_A f, g)$ (即函数 $\lambda\to((A-\lambda)^{-1}f, g)$) 对于每一 f 和 g 是一个整函数; 由于 $\rho_A(\infty)=0$, 函数 $(\rho_A f, g)$ 在 ∞ 的一个邻域有界，所以在全平面有界．Liouville 定理蕴涵 $(\rho_A f, g)$ 是一个常数; 由于 $\rho_A(\infty)=0$, 可推知

$$((A-\lambda)^{-1}f, g)=0$$

对 f, g 和 λ 恒等地成立．由于这是荒谬的(以 $(A-\lambda)f$ 和 f 替换 f 和 g), 空谱的假定站不住脚.

解 74. $(r(A))^n=r(A^n)\leqslant\|A^n\|$, 因而对一切 n 有 $r(A)\leqslant\|A^n\|^{1/n}$, 由此推知

$$r(A)\leqslant\liminf_n\|A^n\|^{1/n}.$$

反向不等式的成立依靠预解式的解析性质(问题 72)．如果

$$\tau(\lambda)=\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left(A-\frac{1}{\lambda}\right)^{-1},$$

则当 $\lambda\neq0$ 且 $1/\lambda$ 不在 A 的谱中时恒有 $\tau(\lambda)=-\lambda(1-\lambda A)^{-1}$. 由于, 对每一 f 和 g, 只要 $|1/\lambda|>r(A)$ (即 $|\lambda|<1/r(A)$), 数值函数 $(\tau f, g)$ 就是解析的, 可以推知它的 Taylor 级数

$$-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(A^nf, g)$$

当 $|\lambda|<1/r(A)$ 时恒收敛．这蕴涵序列 $\{((\lambda A)^nf, g)\}$ 对每一这样的 λ 是有界的．据一致有界性原理得到结论: 序列 $\{|\lambda|^n\cdot\|A^n\|\}$ 是有界的．如果对一切 n 有 $|\lambda|^n\cdot\|A^n\|\leqslant\alpha$, 则

$$|\lambda|\cdot\|A^n\|^{1/n}\leqslant\alpha^{1/n},$$

所以

$$|\lambda|\cdot\limsup_n\|A^n\|^{1/n}\leqslant1.$$

由于当 $|\lambda|<1/r(A)$ 时这恒真, 可推知

$$\limsup_n \|A^n\|^{1/n} \leqslant r(A).$$

证完.

解 75. 题中所断言的酉等价可以经一个对角算子实现.要用哪一个对角算子可倒推求之. 假定 D 是带对角线 $\{\delta_n\}$ 的对角算子, 并假定 $AD=DB$. 由此推知(将等式两边的算子施行于 e_n)对每一 n 有

$$\alpha_n\delta_n=\beta_n\delta_{n+1}.$$

置 $\delta_0=1$,并由递归法确定诸 δ. 先考虑诸正的 n. 如果 $\beta_n\neq 0$, 置 $\delta_{n+1}=(\alpha_n/\beta_n)\delta_n$. 如果 $\beta_n=0$, 则 $\alpha_n=0$(由于, 据假定, $|\alpha_n|=|\beta_n|$); 此时置 $\delta_{n+1}=1$. 对于诸负的 n(如果有)可向相反方向施以同样的演算过程. 这就是说, 如果 $\alpha_n\neq 0$, 置 $\delta_n=(\beta_n/\alpha_n)\delta_{n+1}$; 如果 $\alpha_n=0$,则置 $\delta_n=1$. 所得结果是一个模 1 的复数的序列 $\{\delta_n\}$. 导向这个序列的诸步骤可以逆推. 已得这序列, 让它诱导一个对角算子 D; 注意到由于对一切 n 有 $|\delta_n|=1$, 知算子 D 是酉算子; 而且最后注意到由于对一切 n 有 $ADe_n=DBe_n$,知算子 D 把 A 变换成 B.

解 76. 首先假设 S 是一个使得 $A=S^{-1}BS$ 的可逆算子. 由此推知 $A^*=S^*B^*S^{*-1}$, 从而 $A^{*n}=S^*B^{*n}S^{*-1}$. 使用前曾用于酉等价的论证, 可推断 S^* 映射 $\ker B^{*n}$ 成 $\ker A^{*n}$. 这蕴涵 S 的矩阵 $\{\sigma_{ij}\}$ 是下方三角的. 考虑方程 $SA=BS$, 并算出两边的第 $n+1$ 行, n 列($n=0, 1, 2, \cdots$)的矩阵元素. 结果是 $\sigma_{n+1,n+1}\alpha_n=\beta_n\sigma_{n,n}$, 从而

$$\left|\frac{\beta_0\cdots\beta_n}{\alpha_0\cdots\alpha_n}\right|=\left|\frac{\sigma_{n+1,n+1}}{\sigma_{0,0}}\right|=\left|\frac{(Se_{n+1},\ e_{n+1})}{\sigma_{0,0}}\right|\leqslant\frac{\|S\|}{|\sigma_{0,0}|}.$$

推证结论: $\{|\alpha_0\cdots\alpha_n/\beta_0\cdots\beta_n|\}$距 0 有界. 要得到(距 ∞ 的)有界性,可对 S^{-1} (代替 S)和方程 $AS^{-1}=S^{-1}B$(代替 $SA=BS$)进行论证.

反之,如果有界性条件被满足, 则可记 $\sigma_0=1$, $\sigma_{n+1}=\beta_0\cdots\beta_n/\alpha_0\cdots\alpha_n$, 令 S 表示具有对角线序列 $\{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots\}$ 的(可逆)对角算子,并验证 $SA=BS$.

解 77. 如果 A 是带权数 α_n 的加权移位，则 $\|A\|=\sup_n|\alpha_n|$，且 $r(A)=\lim_k\sup_n\left|\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right|^{1/k}$.

r 的表示式看来稍微复杂一些，但在一些情况下它可以用来计算某些东西.

证. 由于 A 是一个移位与一个具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子的乘积，又由于移位是一个等距算子，可以推知 A 的范数等于关联的对角算子的范数.

要证明关于谱半径的断语，可算出 A 的诸幂. 如果 $Ae_n=\alpha_n e_{n+1}$，则 $A^2e_n=\alpha_n\alpha_{n+1}e_{n+2}$，$A^3e_n=\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}e_{n+3}$，如此类推. 这里证明了，$A^k$ 是一个等距算子（就是关联的移位算子的 k 次幂）和一个对角算子（其第 n 对角项是从 α_n 开始 k 个连接着的 α 的乘积）的乘积. 结论：A^k 的范数是具有长度 k 的那个"滑动积"的模的上确界，或明显地表示出来，

$$\|A^k\|=\sup_n\left|\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right|\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

谱半径的表示式立即由此推得.

解 78. 如果 A 是带权数 $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\}$ 的单侧加权移位，又若对 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 有 $\alpha_n\neq0$，则 $\Pi_0(A)=\emptyset$，且 $\Pi_0(A^*)$ 是一个以 0 为中心以 $\lim_n\inf\left|\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right|^{1/n}$ 为半径的圆域. 此圆域可能是开的或闭的，还可能退化成仅含原点.

证. 关于 A 的证明与不加权单侧移位者（解 67）相同. 用序列（坐标）记号表示，如果 $Af=\lambda f$，这里的 $f=\langle\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\rangle$，则 $Af=\langle0,\ \alpha_0\xi_0,\ \alpha_1\xi_1,\ \alpha_2\xi_2,\ \cdots\rangle$，因此 $0=\lambda\xi_0$ 且对一切 n 有 $\alpha_n\xi_n=\lambda\xi_{n+1}$. 这蕴涵对一切 n 有 $\xi_n=0$；对 $\lambda=0$ 和 $\lambda\neq0$ 的情形要分开考察.

要研究 A^*，该知道它到底是什么算子. 这可以考察矩阵（把紧靠在主对角线下的一条对角线拨到紧靠其上的一条去）或模仿求 U^* 的手续（解 67），或把 A 表成 U 与一个对角算子的乘积，然后应用关于 U^* 的已知结果. 答案是：如果 $n=0$，$A^*e_n=0$；且如果

$n>0$, $A^*e_n=\alpha_{n-1}^*e_{n-1}$. 表成序列形式：如果 $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$，则 $A^*f=\langle\alpha_0^*\xi_1, \alpha_1^*\xi_2, \alpha_2^*\xi_3, \cdots\rangle$. 由此推知 $A^*f=\lambda f$ 当且只当对一切 n 有

$$\alpha_n^*\xi_{n+1}=\lambda\xi_n.$$

这蕴涵，如果 $n>1$，则 ξ_n 是 ξ_0 乘以

$$\frac{\lambda^n}{\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i^*}$$

的积. 由于一个数列定义一个矢量当且只当它是平方可和的，可推知 $\lambda\in\Pi_0(A^*)$ 当且只当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda^n}{\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i}\right|^2<\infty.$$

这条件相当于某一 λ^2 的幂级数是收敛的；这表明满足该条件的 λ 形成一个圆域. 该圆域的半径可以从幂级数收敛半径的公式得到.

如果 $\alpha_n=1(n=0, 1, 2, \cdots)$，则 $\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i=1(n=1, 2, 3, \cdots)$，所以该幂级数在开单位圆域内收敛；参看解 67. 如果

$$\alpha_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2\left(=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right),$$

则 $\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i=(n+1)^2$，所以幂级数在闭单位圆域上收敛，该域此时凑巧与谱相同，参看解 77. 如果 $\alpha_n=1/(n+1)$，则 $\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i=1/n!$，所以该幂级数仅在原点收敛.

解 79. 如果 $p=\{p_n\}$ 是一个使得 $\{p_{n+1}/p_n\}$ 有界的正数序列，则 $l^2(p)$ 上的移位 S 酉等价于 l^2 上带权数 $\{\sqrt{p_{n+1}/p_n}\}$ 的加权移位 A.

证. 如果 $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\in l^2(p)$，记

$$Uf=\langle\sqrt{p_0}\,\xi_0, \sqrt{p_1}\,\xi_1, \sqrt{p_2}\,\xi_2, \cdots\rangle.$$

变换 U 把 $l^2(p)$ 映射到 l^2 内，它清楚地是线性且等距的. 如果

$\langle\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots\rangle\in l^2$, 又若 $\xi_n=\eta_n/\sqrt{p_n}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}p_n|\xi_n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\eta_n|^2$; 这证明了 U 把 $l^2(p)$ 映射到 l^2 上.

断语: U 把 S 变换成 A. 计算:

$$\begin{aligned}USU^{-1}\langle\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots\rangle &= US\langle\eta_0/\sqrt{p_0}, \eta_1/\sqrt{p_1}, \eta_2/\sqrt{p_2}, \cdots\rangle\\ &= U\langle 0, \eta_0/\sqrt{p_0}, \eta_1/\sqrt{p_1}, \eta_2/\sqrt{p_2}, \cdots\rangle\\ &= \langle 0, \sqrt{p_1/p_0}\,\eta_0, \sqrt{p_2/p_1}\,\eta_1, \sqrt{p_3/p_2}\,\eta_2, \cdots\rangle\\ &= A\langle\eta_0, \eta_1, \eta_2, \cdots\rangle\end{aligned}$$

结论: 一个加权序列空间上的通常移位的变换是一个通常序列空间上的加权移位.

从这个结果看来, 关于加权序列空间的一切问题可以利用加权移位来解答. 例如, S 的谱半径是 $\lim_k \sup_n\left(\prod_{i=0}^{k-1}\sqrt{p_{n+i+1}/p_{n+i}}\right)^{1/k}$ (参看解 77).

解 80. 如果 A 是一个带有使得 $\alpha_n\to 0$ 的正权数 α_n 的单侧加权移位, 则 $\Lambda(A)=\{0\}$ 且 $\Pi_0(A)=\emptyset$.

证. 利用解 77 来算出 $r(A)$. 在许多特例中, 这是很容易做到的. 例如, 如果 $\alpha_n=1/2^n$, 则 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}1/2^{n+i}\right)^{1/k}$ (在一切 n 上) 的上确界在 $n=0$ 时达到. 由此推知这上确界是

$$\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i}\right)^{1/k}=\frac{1}{2^m},$$

这里
$$m=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}i=\frac{1}{2}(k-1).$$

这蕴涵, 当 k 趋于 ∞ 时, 这上确界趋于 0.

在一般情形, 首先观察到当 $k\to\infty$ 时 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_i\right)^{1/k}\to 0$. (这个断语是另一加法形式的断语的乘法形式的说法, 该加法形式的断语是: 如果 $\alpha_n\to 0$, 则 $(1/k)\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\to 0$, 根据它, 收敛性蕴涵着 Cesaro 收敛性. 两者的证明相似而且都容易. 从加法形式说法导出

乘法形式说法也是容易的.)由于 $\alpha_{n+1}\to 0$,同样可推知 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{1+i}\right)^{1/k}\to 0$; 更一般地,对每一 n,当 $k\to\infty$ 时 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}\to 0$.

问题是要证明,当 k 很大时,$\sup_n\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}$ 是小的. 给定 $\varepsilon(>0)$ 并给定 $n(=0, 1, 2, \cdots)$,可求 $k_0(n, \varepsilon)$ 使得当 $k\geqslant k_0(n,\varepsilon)$ 时,恒有 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}<\varepsilon$. 如果 n_0 能使 $\alpha_n<\varepsilon$ 对 $n\geqslant n_0$ 成立,则 $\max(k_0(0, \varepsilon), k_0(1, \varepsilon), \cdots, k_0(n_0-1, \varepsilon))$ 就是足够"大"的; 如果 k 大于或等于这个极大值,则 $\sup_n\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}<\varepsilon$. 的确,如果 $n<n_0$,就因为 $k\geqslant k_0(n, \varepsilon)$ 而有 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}<\varepsilon$; 如果 $n\geqslant n_0$,则 $\left(\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right)^{1/k}<\varepsilon$,因为该乘积中每一因子小于 ε.

$\Pi_0(A)$ 是空集,应用解 78 即可得到.

解 81. *存在着一个算子的可数集,其中每一算子都有谱 $\{0\}$,但其直接和则有谱半径 1.*

证. 这里有一个用加权移位描述的例子,考虑(单侧)序列

$$\{1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \cdots\},$$

并令 A 表示带有这些权数的单侧加权移位. 序列中的那些 0 保证了 A 是

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \cdots,$$

所给出的诸算子的直接和,从而它是一列算子的直接和,这些算子中的每一个的谱都是 $\{0\}$. 可是由于权数序列有任意长度的由 1 组成的组段,加权移位的谱半径公式(解 77)蕴涵 $r(A)=1$.

这样的例子之所以可能是由于近似点谱的不规矩行为. 对点谱说,可能的最好(最近常理的)断语是成立的(且易于证明):一个直接和的点谱是其直和加项的点谱的并. 过渡到伴随算子,可以推

出，对压缩谱说，同样的可能的最好断语也成立。

解 82. 证明的主要步骤在于不等式

$$|(ABf, f)|^{2^n} \leqslant (AB^{2^n}f, f)\cdot(Af, f)^{2^n-1},$$

该式可用归纳法证明．对 $n=0$，断语是显而易见的．为了完成归纳步骤，可对算子 A 所定义的内积应用 Schwarz 不等式，如下：

$$\begin{aligned}|(ABf, f)|^{2^{n+1}} &= (|(ABf, f)|^{2^n})^2\\ &\leqslant ((AB^{2^n}f, f)(Af, f)^{2^n-1})^2\\ &\leqslant (AB^{2^n}f, B^{2^n}f)\cdot(Af, f)\cdot(Af, f)^{2^{n+1}-2}\\ &\leqslant (B^{*2^n}AB^{2^n}f, f)(Af, f)^{2^{n+1}-1}.\end{aligned}$$

如果知道 B^* 的幂可以从 A 的左边移向其右边而变成 B 的幂，我们所希望的不等式将随之而得．准确地说：只须对一切 k，有 $B^{*k}A=AB^k$．证明这一点的归纳论证是容易的；只有 $k=1$ 的情形要略动脑筋．AB 是自伴的假定就在这里进入问题，的确，$AB=(AB)^*=B^*A$．

包含着 B 的谱半径的不等式的证明现在立即得到．刚才建立的不等式蕴涵

$$|(ABf, f)|^{2^n} \leqslant \|A\|\cdot\|B^{2^n}\|\cdot\|f\|^2\cdot(Af, f)^{2^n-1}.$$

从后面这个不等式中取两边的 2^n 次根，并求 $n\to\infty$ 时的极限即可．

第十一章　范 数 拓 扑

解 83. 一个无穷维希耳伯特空间上的算子的距离空间是不可分的．

证． 由于每一个无穷维希耳伯特空间有一个可分的无穷维子空间，又由于每一个可分的无穷维希耳伯特空间同构于 $\mathbf{L}^2(0, 1)$，不失一般性可假定基础希耳伯特空间就是 $\mathbf{L}^2(0, 1)$ 以着手讨论．在此假定下，令 φ_t 表示$[0, t]$的特征函数，并令 P_t 表示由 φ_t 诱导出的乘法算子，$0\leqslant t\leqslant 1$．如果 $s<t$，则 P_t-P_s 是由(s, t)的特征函数诱导出的乘法算子，所以 $\|P_t-P_s\|=1$．结论：存在一个算子

的不可数集使得它们中的任两者间的距离是 1；一个这样的集的存在是与可分性不相容的．同一结论的另一可供选择的例子：考虑对角线由 0 或 1 组成的对角算子．

解 84．可逆算子的集是开的且求逆运算是连续的．

证．首先我们记得如果 $\|1-A\|<1$，则 A 是可逆的且 $A^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n$（参看解 72）；由此推知

$$\|A^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|1-A\|^n=\frac{1}{1-\|1-A\|}.$$

现在假设 A_0 是一个可逆算子．由于对每一 A 有

$$1-AA_0^{-1}=(A_0-A)A_0^{-1},$$

可推知如果 $\|A_0-A\|<1/\|A_0\|^{-1}$，则 $\|1-AA_0^{-1}\|<1$．这蕴涵如果 $\|A_0-A\|<1/\|A_0^{-1}\|$，则 A 是可逆的（因为 AA_0^{-1} 可逆），且

$$\|A^{-1}\|=\|((AA_0^{-1})A_0)^{-1}\|\leqslant\|A_0^{-1}\|\cdot\|A_0A^{-1}\|$$

$$\leqslant\frac{\|A_0^{-1}\|}{1-\|A_0-A\|\cdot\|A_0^{-1}\|}.$$

结论：不但可逆算子的集是开的，而且当一个算子在一个可逆算子的一个充分小邻域中变动时，该算子就不仅可逆，而且它的逆还保持有界．

前段结果使我们接近连续性的证明．请注意

$$\|A_0^{-1}-A^{-1}\|=\|A_0^{-1}(A-A_0)A^{-1}\|\leqslant\|A_0^{-1}\|\cdot\|A-A_0\|\cdot\|A^{-1}\|.$$

如果 A_0 固定，又若 A 充分接近 A_0，则右边居中的因子使乘积很小，而其它两因子保持有界．

解 85．A_k 的权数序列是

$$\left\{\cdots,1,1,1,\left(\frac{1}{k}\right),1,1,1,\cdots\right\}.$$

由于 $1/k\leqslant1$，可推知进入加权移位的谱半径的公式（参看解 77）中的滑动积的上确界等于 1，从而 $r(A_k)=1$．结论：A_k 的谱包含于闭单位圆域中，而且这对于 $k=1,2,3,\cdots,\infty$ 都成立．

如果 $k<\infty$，则 A_k 是可逆的，而且事实上 A_k^{-1} 本身是一个加权移位．由于依照 $n\neq1$ 或 $n=1$，$A_k^{-1}e_n$ 是 e_{n-1} 或 ke_{n-1}，可推知

A_k^{-1} 将诸 e_n 向后移位（且按刚才所指定权数给它们加权）．在酉等价范围内向后移与向前移是无所区别的(参看解 68)，因而加权移位的理论可适用于 A_k^{-1}．A_k^{-1} 的权数序列是

$$\{\cdots, 1, 1, 1, (1), k, 1, 1, 1, \cdots\}.$$

长度m的滑积的上确界现在等于k；由此推知 $r(A_k^{-1})=\lim\limits_m k^{1/m}=1$．结论：$A_k^{-1}$ 的谱包含于闭单位圆域中，这对于$k=1, 2, 3, \cdots$成立(但对于 ∞ 则不然)．

前两段的结论，与关于求逆运算的谱映射定理一起，蕴涵 A_k 的谱(以及 A_k^{-1} 的谱)包含于单位圆(周)．这一点，加上加权移位的谱的圆对称性（参看问题 75），蕴涵 A_k 的谱等于单位圆（周）$(k=1, 2, 3, \cdots)$．

A_∞ 的谱很清楚地不是单位圆(周)；由于 $A_\infty e_0=0$，A_∞ 的谱包含原点．这指明 A_∞ 的谱与其它诸 A_k 的谱之间的变化不是连续的（注意 $A_k \to A_\infty$，即当 $k\to\infty$，$\|A_k-A_\infty\|\to 0$）．A_∞ 的谱事实上等于单位圆域．证明这一点的最捷径是注意到 $n>0$ 的诸 e_n 的张成空间约化 A_∞(它和它的正交补都在 A_∞ 下不变)，以及 A_∞ 在这个张成空间上的限制是单侧移位．由于每一算子的谱包含它的每一直和加项的谱，证完．

本例属于 G. Lumer.

解 86． 令 $\mathbf{T}$ 表示（在一个固定的希耳伯特空间上的）一切奇异算子的集，又已给一个算子 A(此后令它固定)，令 $\varphi(\lambda)$表示（在算子的距离空间中）自 $A-\lambda$ 到 $\mathbf{T}$ 的距离．函数φ是连续的（这是关于距离空间的一个基本事实；它甚至不依赖于 $\mathbf{T}$ 是闭的)．如果 Λ_0 是一个包含 $\Lambda(A)$的开集，如果Δ是具有中心0和半径 $1+\|A\|$ 的闭圆域，又若 $\lambda\in\Delta-\Lambda_0$，则 $\varphi(\lambda)>0$（这的确依赖于 $\mathbf{T}$ 是闭的；如果 $\varphi(\lambda)=0$，即 $d(A-\lambda, \mathbf{T})=0$，则 $A-\lambda\in\mathbf{T}$，即 $\lambda\in\Lambda(A)$)．由于 Δ-Λ_0 是紧的，存在一个正数 ε，使得对 $\Delta-\Lambda_0$ 中一切 λ 有 $\varphi(\lambda)\geqslant\varepsilon$；假定 $\varepsilon<1$ 很清楚地无损于一般性．现在假设 $\|A-B\|<\varepsilon$．可以推知如果 $\lambda\in\Delta-\Lambda_0$，则

$$\|(A-\lambda)-(B-\lambda)\|<\varepsilon\leqslant d(A-\lambda,\ \mathbf{T}).$$

这蕴涵 $B-\lambda$ 不在 $\mathbf{T}$ 中，从而 λ 不在 $\Lambda(B)$ 中．结论：$\Lambda(B)$ 与 $\Delta-\Lambda_0$ 不相交．同时，如果 $\lambda\in\Lambda(B)$，则

$$|\lambda|\leqslant\|B\|\leqslant\|A\|+\|A-B\|<1+\|A\|,$$

因此 $\Lambda(B)\subset\Delta$. $\Lambda(B)$ 的这两个性质正好说明 $\Lambda(B)\subset\Lambda_0$; 证完.

以预解式的已知性质为基础，可以给出一个不同的证明．如果 $\varphi(\lambda)=\|(A-\lambda)^{-1}\|$[注]，则 φ 在 Λ_0 之外有定义且连续；由于它在 ∞ 取值 0，它是有界的(参看问题 72)．譬如说，$\varphi(\lambda)<\alpha$ 每当 $\lambda\notin\Lambda_0$，则可置 $\varepsilon=1/\alpha$．如果 $\|A-B\|<\varepsilon$ 且 $\lambda\notin\Lambda_0$，则

$$\|(A-\lambda)-(B-\lambda)\|=\|A-B\|<\varepsilon<\frac{1}{\|(A-\lambda)^{-1}\|};$$

如同在解 84 中，可以推知 $B-\lambda$ 是可逆的.

距离空间证法属于 C. Wasiutynski；预解式证法属于 E. A. Nordgren.

解 87. 存在一个幂零算子的收敛序列使得极限的谱半径是正的.

证．(序列的) 构造法奠基于一个收敛于 0 的正数序列 $\{\varepsilon_n\}$．在答复诸 ε 该是什么数之前先要知道我们期待它们做些什么．定义一个序列 $\{\alpha_n\}$ 如下：每第二个 α 等于 ε_0 (即 $\alpha_0=\varepsilon_0,\alpha_2=\varepsilon_0,\alpha_4=\varepsilon_0,\cdots$)；剩下的 α 中每第二个 α 等于 ε_1 (即 $\alpha_1=\varepsilon_1,\ \alpha_5=\varepsilon_1,\ \alpha_9=\varepsilon_1,\cdots$)；再剩下的 α 中每第二个 α 等于 ε_2；如此类推以至无穷．这些 α 的序列呈下形：

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \cdots.$$

令 A 表示以这些 α 为权数的单侧加权移位，又，对每一非负整数 k，令 A_k 表示这样的加权移位，其权数就是诸 α 但其中每一 ε_k 均换成 0．于是(例如) A_2 的权数序列是

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ 0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ 0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_0,\ \cdots.$$

据这构造法，两件事是显然的：A_k 是以 2^{k+1} 为指数的幂零算子，且 A_k-A (它是一个加权移位)的范数是 ε_k.

[注]　此处的 φ 与前段的 φ 所表示的函数不同．——译者注

剩下的就只是证明，可以如此选择诸 ε 以使 $r(A)>0$. 为此目的，注意

$$\alpha_0=\varepsilon_0,$$
$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2=\varepsilon_0^2\varepsilon_1,$$
$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6=\varepsilon_0^4\varepsilon_1^2\varepsilon_2,$$

且，一般地，如果 $n=2^p-2\,(p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，则

$$\alpha_0\cdots\alpha_n=\varepsilon_0^{2^{p-1}}\cdots\varepsilon_{p-1}.$$

所以 $$\log(\alpha_0\cdots\alpha_n)=\sum_{k=0}^{p-1}2^{p-1-k}\log\varepsilon_k=2^p\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\log\varepsilon_k}{2^{k+1}},$$

或 $$\log(\alpha_0\cdots\alpha_n)^{1/(n+1)}=\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\log\varepsilon_k}{2^{k+1}}.$$

这蕴涵，如果级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log\varepsilon_k}{2^{k+1}}$$

收敛(这是可能的，例如当 $\varepsilon_k=1/2^k$)，则

$$\liminf_n\log(\alpha_0\cdots\alpha_n)^{1/(n+1)}>-\infty,$$

所以 $$\liminf_n(\alpha_0\cdots\alpha_n)^{1/(n+1)}>0.$$

所希望的结论可以从解 77[注] 推得.

本例属于 S. Kakutani; 参看 Rickart [1960, p. 282].

第十二章 强和弱拓扑

解 88. 涉及一致性的第一个断语其实与算子理论没有什么关联，它仅是问题 16 的一个特例. 为了证明第二个断语，可假定 $A=0$; 这无损于普遍性. 在这情形下，该断语的假设条件就是说，对每一正数 ε，如果 n 充分大，则

当 $\|f\|=1$，恒有 $\|A_nf\|<\varepsilon$;

一致性表现于 n 的大小与 f 无关. 由此得知，如果 n 充分大，则

[注] 原书误为"解78". ——译者注

$$\text{当 } f\neq 0, \quad \text{恒有} \left\| A_n \frac{f}{\|f\|} \right\| < \varepsilon,$$

从而　　对一切 f 有 $\|A_n f\| \leqslant \varepsilon \|f\|$.

这蕴涵如果 n 充分大，则

$$\|A_n\| \leqslant \varepsilon.$$

上面的论证具有普遍性；它适用于一切网，不仅适用于序列。

解 89. 范数关于一致拓扑是连续的而关于强和弱拓扑是不连续的.

证. 关于一致拓扑的命题的证明包含于不等式

$$\big|\|A\| - \|B\|\big| \leqslant \|A-B\|$$

中. 这不过是范数的次可加性的一种表达方式，它蕴涵范数在范数拓扑中是一致连续函数. 这个证明对于范数在其它拓扑中的连续性没有说明任何东西. 一个范数在它本身所定义的拓扑中总是连续的，在其它拓扑中那就不一定了。

范数关于强拓扑不是连续的（也不是序列地连续的），而且关于弱拓扑更加不是连续的，要证明这一点试考虑下例. 令 $\{\mathbf{M}_n\}$ 表示一个非零子空间的递降序列，其交是 $\{0\}$，又令 $\{P_n\}$ 表示对应的投影序列. 序列 $\{P_n\}$ 强收敛于 0（要看出这一点，可构成 $\mathbf{M}_1^{\perp}$ 的一个就范正交基，再构成 $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2^{\perp}$ 的就范正交基，$\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3^{\perp}$ 的就范正交基，如此类推，然后把它们串起来构造成全空间的一个基. 也参看解 94）. 范数的序列 $\{\|P_n\|\}$ 不收敛于 0；其实，对一切 n 有 $\|P_n\| = 1$.

解 90. （求）伴随（的）映射关于一致和弱拓扑是连续的，而关于强拓扑则是不连续的.

证. 关于一致拓扑的命题的证明包含于等式

$$\|A^* - B^*\| = \|A - B\|$$

中. 如果从一空间到另一空间的某函数是连续的，则当定义域的拓扑变大时它仍保持其连续性，当值域的拓扑变小时也是如此（这就是范数的强不连续性蕴涵它的弱不连续性的理由）. 可是，如果从一空间到其本身的映射是连续的，则当空间的拓扑变化时，不能

断言连续性将如何变化，拓扑的每一变化都从两个方向产生影响。事实上，各种情况都可能发生，(求)伴随(的)映射就证明了这一点。当拓扑向下降(从范数拓扑变成强再变成弱拓扑)时，伴随映射从连续的变成不连续的，再回头变成连续的。

为了证明伴随映射的强不连续性，令 U 表示单侧移位，并记 $A_k=U^{*k}$，$k=1, 2, 3, \cdots$。断语：$A_k\to 0$(强)，但是序列$\{A_k^*\}$并不强收敛于任何算子。的确，

$$\|A_k\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle\|^2=\|\langle\xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \cdots\rangle\|^2$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}|\xi_n|^2,$$

因此，对每一f，$\|A_kf\|^2$ 是一个收敛级数的尾部，所以 $A_kf\to 0$。关于$\{A_k^*\}$的否定断语可以这样证明：如果$f\neq 0$，则 $\{A_k^*f\}$ 不是哥西序列。的确：

$$\|A_{m+n}^*f-A_n^*f\|^2=\|U^{m+n}f-U^nf\|^2=\|U^mf-f\|^2$$
$$=\|U^mf\|^2-2\mathrm{Re}(U^mf, f)+\|f\|^2$$
$$=2(\|f\|^2-\mathrm{Re}(f, U^{*m}f)).$$

由于当 $m\to\infty$ 时，$\|U^{*m}f\|\to 0$，得知当m和n变大时，$\|A_{m+n}^*f-A_n^*f\|$拒不变小；事实上，如果m是很大的，则 $\|A_{m+n}^*f-A_n^*f\|$几乎等于$\sqrt{2}\|f\|$。

至于伴随映射的弱连续性，则为下面的等式所蕴涵：

$$|(A^*f, g)-(B^*f, g)|=|(f, Ag)-(f, Bg)|$$
$$=|(Ag, f)-(Bg, f)|.$$

解 91. 关于一致拓扑的命题的证明包含于不等式

$$\|AB-A_0B_0\|\leqslant\|AB-AB_0\|+\|AB_0-A_0B_0\|$$
$$\leqslant\|A\|\cdot\|B-B_0\|+\|A-A_0\|\cdot\|B_0\|$$
$$\leqslant(\|A-A_0\|+\|A_0\|)\|B-B_0\|+\|A-A_0\|\cdot\|B_0\|$$

中。

关于强拓扑，有一个漂亮的反例依赖于下述断语：具有指数 2 的幂零算子全体的集(即一切使得 $A^2=0$ 的算子 A 组成的集)是强稠密的(这思想属于 Arnold Lebow)。为了证明这个断语，可设

$$\{A: \|A_0 f_i - Af_i\| < \varepsilon,\ i=1, \cdots, k\}$$

是随意的一个基强邻域．不失普遍性，可设诸 f 线性无关(甚至可设它们就范正交)；因为如果不是如此，可用张成同样空间的一个线性无关组(就范正交组)代替它们，且同时把 ε 减小到必要的程度．对每一 $i(=1, \cdots, k)$，求一矢量 g_i 使得 $\|A_0 f_i - g_i\| < \varepsilon$，且使得诸 g 的张成空间与诸 f 的张成空间仅以 0 为公共元；只要基础希耳伯特空间是无穷维的，这总是可能的．令 A 表示使得

$$Af_i = g_i \text{ 且 } Ag_i = 0 \quad (i=1, \cdots, k)$$

且 $\qquad Ah=0$ 每当 $h \perp f_i$ 且 $h \perp g_i \quad (i=1, \cdots, k)$

的那个算子．显然 A 是幂零的且具有指数 2，且同样显然地，A 属于所指定的邻域．

如果平方运算是强连续的，则具有指数 2 的幂零算子全体的集将是强闭的，因而一切算子将都是具有指数 2 的幂零算子，而这是荒谬的．

这个结果当然蕴涵乘法不是一并地强连续的．由于强拓扑大于弱拓扑，因此强稠密集必然是弱稠密的，而上述关于幂零算子的辅助断语对弱拓扑与对强拓扑一样地成立．结论：平方运算不是弱连续的，从而乘法不是一并地弱连续的．

解 92． 最容易的证明是使用收敛性．在一般拓扑学中，序列的收敛性有时会引致错误，但是网(广义序列)的收敛性则是够好的．因此假设 $A_j \to A$ (强)，即对每一 f 有 $A_j f \to Af$，则特别有，对每一 f，$A_j Bf \to ABf$，这就证明了关于 A 的强连续性．如果另一方面，$B_j \to B$ (强)，即如果对每一 f 有 $B_j f \to Bf$，则施以 A 便得结论：对每一 f 有 $AB_j f \to ABf$；这证明了关于 B 的强连续性．弱连续性可以同样处理．如果 $(A_j f, g) \to (Af, g)$ 对每一 f 和 g 成立，则特别有 $(A_j Bf, g) \to (ABf, g)$ 对每一 f 和 g 成立；如果 $(B_j f, g) \to (Bf, g)$ 对每一 f 和 g 成立，则特别有 $(AB_j f, g) = (B_j f, A^* g) \to (Bf, A^* g) = (ABf, g)$ 对每一 f 和 g 成立．

解 93． (a) 问题的关键在于有界性．先假定范数的序列 $\{\|A_n\|\}$ 是有界的 (假定 $\{\|B_n\|\}$ 的有界性同样有效)．由于，对每

$\to f$,

$$\|A_nB_nf-ABf\|\leqslant\|A_nB_nf-A_nBf\|+\|A_nBf-ABf\|$$
$$\leqslant\|A_n\|\cdot\|(B_n-B)f\|+\|(A_n-A)Bf\|,$$

有界性的假定如所期望地蕴涵 $A_nB_nf\to ABf$.

现在,关于有界性的假定到底是否合理? 答复是根本不须假定它,它是可以证明的. 事实上,它是关于算子的一致有界性原理的一个直接推论:如果一个算子序列是弱收敛的(如果它是强收敛的,当然更是如此),则它是弱有界的,因此是有界的.

(b) 乘法不是弱序列连续的.

证. 令 U 表示单侧移位, 且记 $A_n=U^{*n}$, $B_n=U^n$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 由于 $A_n\to 0$(强), 得知 $A_n\to 0$(弱), 从而 $B_n\to 0$(弱)(参看解 90). 可是由于对一切 n 有 $A_nB_n=1$, $A_nB_n\to 0$ (弱) 不成立.

解 94. 自伴算子的有界增加序列关于强拓扑恒是收敛的,但是关于一致拓扑则不一定收敛.

证. 关于强拓扑的这个断语, 证明的一法是利用关于弱拓扑的相应断语. 令$\{A_n\}$表示自伴算子的一个有界增加序列,而 A 表示其弱极限. 由于 $A_n\leqslant A$, 算子 $A-A_n$ 是正的, 因而它有一个正平方根,以 B_n 表示之(参看问题 95). 由于

$$\|B_nf\|^2=(B_nf, B_nf)=(B_n^2f, f)=((A-A_n)f, f)\to 0,$$

序列$\{B_n\}$强趋近于 0. 由于$\{\|A-A_n\|\}$有界, $\{\|B_n\|\}$ 也是有界的; 可设对一切 n 有 $\|B_n\|\leqslant\beta$. 现在从关系式

$$\|(A-A_n)f\|=\|B_n^2f\|\leqslant\beta\|B_nf\|$$

就可得到所断言的强收敛性. 又一次看到 (参看解 1), 在这里序列没有起什么特殊的实质上的作用; 改为一般的网,同样可行.

不使用关于正平方根的存在性的定理有时在技巧上有方便之处. 如果要求我们不用该定理证明上面得到的结果, 是可以做到的, 但是使用平方根的证明更好地揭露了问题的实质. 下面介绍不用平方根的证明怎样进行. 不失普遍性, 可假定 $A\leqslant 1$. 如果 $m<n$,则根据关于由正算子 A_n-A_m 确定的内积的 Schwarz 不等

式,有

$$\|(A_n-A_m)f\|^4=((A_n-A_m)f,\ (A_n-A_m)f)^2$$
$$\leqslant((A_n-A_m)f,\ f)((A_n-A_m)^2f,\ (A_n-A_m)f).$$

由于 $A_n-A_m\leqslant 1$,因此 $\|A_n-A_m\|\leqslant 1$,得知

$$\|A_nf-A_mf\|^4\leqslant((A_nf,\ f)-(A_mf,\ f))\|f\|^2.$$

强收敛定理有一个关于投影的常用的推论. 如果 $\{\mathbf{M}_n\}$ 是一个子空间的递升序列,则对应的投影序列 $\{P_n\}$ 是一个增加的(且显然是有界的)自伴算子序列. 由此得知存在一个自伴算子 P 使得 $P_n\to P$ (强). 断语:P 是到 $\mathbf{M}_n$ 全体张成的子空间 $\mathbf{M}$ 上的投影(参看解 89). 理由:如果 f 属于某一 $\mathbf{M}_n$,则 $Pf=f$,如果 f 与一切 $\mathbf{M}_n$ 正交;则 $Pf=0$;这两点合起来蕴涵存在一个稠密集,在它上面 P 与到 $\mathbf{M}$ 上的投影一致.

投影算子的增序列也足以证明单调收敛定理关于一致拓扑不成立. 的确,如果序列 $\{\mathbf{M}_n\}$严格上升,则序列$\{P_n\}$不能按范数收敛于 P(在本例中,根本不收敛于任何算子),因为它甚于不是一个哥西序列. 事实上,投影的单调序列仅在平凡的情形才会是一个哥西序列;$\|P_n-P_m\|=1$ 除非 $P_n=P_m$.

解 95. (为了便于引述)宜将证明分成如下若干小步骤.

(1) 正算子的一切正整数幂都是正算子. 的确,$(A^{2n}f, f)=\|A^nf\|^2$ 且 $(A^{2n+1}f,\ f)=(A\cdot A^nf,\ A^nf)$; 前者是正数因为范数是正数,后者是正数因为 A 是正的. 后文中需要这个结果的算子是 $1-A$ 而不是 A. (注意:这个断语是谱定理的一个浅易的推论.)

(2) (据归纳法)每一 B_n 是 $1-A$ 的正系数多项式,从而(据(1))每一 B_n 是一个正算子.

(3) 据(2),一切 B_n 两两可交换,由此推知

$$B_{n+2}-B_{n+1}=\frac{1}{2}(B_{n+1}^2-B_n^2)=\frac{1}{2}(B_{n+1}-B_n)(B_{n+1}+B_n).$$

这蕴涵(据(2)和归纳法)$B_{n+1}-B_n$ 是 $1-A$ 的正系数多项式,从而是正的;由此知序列$\{B_n\}$是增加的.

(4) B_{n+1} 的用 B_n 表示的定义蕴涵对一切 n 有$\|B_n\|\leqslant 1$(用归

纳法)；所以序列$\{B_n\}$是有界的.

(5) 据(3)和(4)，$\{B_n\}$是一个有界增加的正算子序列，因此它强收敛于某一(必然是正的)算子B. 注意这个论证用到解94. 由于正在进行的讨论必须避免平方根，我们必须使用解94中没有用到平方根的那种证法.

收敛性已经得到证明；剩下的是要计算极限. 利用问题93，这是容易的；由于$B_n \to B$ (强)，得知$B_n^2 \to B^2$ (强)，从而

$$B=\frac{1}{2}((1-A)+B^2).$$

这说明
$$A=1-2B+B^2=(1-B)^2,$$
证完.

这是标准的证明；参看 Riesz-Nagy[1952, § 104].

解 96. 即使少量的关于非可换投影的经验，已可说明仅通过熟悉的代数运算不大可能用E和F表示$E\wedge F$. 下面这个十分漂亮的几何的考虑指明了拓扑学怎样进入问题，并且启发了实际的证明. 假设基础希耳伯特空间$\mathbf{H}$是二维实欧几里得空间，并假设$\mathbf{M}$和$\mathbf{N}$是两条经过原点的不同的但是不正交的直线. 在$\mathbf{H}$中任取一点f，投影它到$\mathbf{M}$上(即得到Ef)，把所得的点投影到$\mathbf{N}$上(FEf)，再投影到$\mathbf{M}$上($EFEf$)，如此继续下去以至于无穷；可以想得到，所得的这个序列收敛于0，它在本例中就是$(E\wedge F)f$. 这提示我们去构成序列

$$E,\ FE,\ EFE,\ FEFE,\ EFEFE,\ \cdots,$$

我们的证明用的却是子序列

$$EFE,\ EFEFE,\ EFEFEFE,\ \cdots,$$

这仅是为了技巧上的方便.

由于$\|EFE\|\leqslant 1$，EFE的各幂形成一个正算子的递降(而且可交换)序列. 由此得知$(EFE)^n$弱收敛于一个算子，譬如G；由于此时弱和强收敛等价，G必属于所给的 von Neumann 代数. 断语：$G=E\wedge F$. 显然G是自伴的. 由于对一切m有$(EFE)^m G=G$，所以$G^2=G$，因此G是一个投影. 由于对一切m有$(EFE)^m$

$FG=G$，所以 $GFG=G$；这蕴涵 $G\leqslant F$（证明：$0=G-GFG=G(1-F)G=G(1-F)(1-F)G$，且 $(1-F)G=(G(1-F))^*$）。由于对一切 n 有 $E(EFE)^n=(EFE)^n$，所以 $EG=G$ 或 $G\leqslant E$。最后，如果 G_0 是使得 $G_0\leqslant E$ 且 $G_0\leqslant F$ 的投影，则 $G_0(EFE)^n=G_0$，由此得 $G_0G=G_0$，因此 $G_0\leqslant G$. 证完.

从本定理容易推出它的对偶定理．这就是断语：在子空间 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ 上的投影 $E\vee F$ 属于包含 E 和 F 的任一 von Neumann 代数．由于

$$E\vee F=1-((1-E)\wedge(1-F)),$$

证明可立即得到.

检查一下证明过程就可以看出定义 von Neumann 代数的性质没有全用上；我们只需要这样的一个序列地强闭的算子集：如果 A 和 B 在这集中，则 ABA（对关于 $E\wedge F$ 的定理说）或

$$1-(1-A)(1-B)(1-A)$$

（对关于 $E\vee F$ 的定理说）也在这集中．要看到即使在后一情形中也不要求 1 必须属于该集合；类如

$$1-(1-A)(1-B)(1-A)$$

的算子如果要求不用 1 而把它写出来显然是可以办到的，不过较笨拙，而上面的表示式比较方便罢了.

第十三章　部分等距变换

解 97. 利用谱定理将 A 表示成乘法，譬如是用 φ 乘的乘法．如果 $\lambda\in\Lambda(A)$ 且 N 是 $F(\lambda)$的任意邻域，则 $F^{-1}(N)$ 是 λ 的邻域，因此 $\varphi^{-1}(F^{-1}(N))$ 有正测度．由于 $\varphi^{-1}(F^{-1}(N))=(F\circ\varphi)^{-1}(N)$，得知 $F(\lambda)$ 在 $F\circ\varphi$ 的本性值域中，因此 $F(\lambda)\in\Lambda(F(A))$．这证明了 $F(\Lambda(A))\subset\Lambda(F(A))$.

证明反向包含式同于证明：如果 $\lambda\notin F(\Lambda(A))$，则 $\lambda\notin\Lambda(F(A))$．$F(\Lambda(A))$是紧集（它是紧集 $\Lambda(A)$ 在连续函数 F 下的象）．由于 λ 不在此集中，λ 有一邻域与此集不相交．如果 N 就是这样

的一个邻域，$N\cap F(\Lambda(A))=\emptyset$，则 $F^{-1}(N)\cap\Lambda(A)=\emptyset$，因此 $\varphi^{-1}(F^{-1}(N)\cap\varphi^{-1}(\Lambda(A))=\emptyset$. 由于 $\varphi^{-1}(\Lambda(A))$ 与整个基础测度空间至多只能相差一个零集，得知 $(F\circ\varphi)^{-1}(N)$ 有零测度，从而 λ 不属于 $F(A)$ 的谱. 证完.

解 98. 假设 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 是希耳伯特空间且设 U 是一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的部分等距变换，以 $\mathbf{M}$ 为始空间（关于这样的变换及其伴随变换的讨论，参看问题 40）. 如果 E 是从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{M}$ 上的投影，又 $f\in\mathbf{M}$，则

$$(U^*Uf, f)=\|Uf\|^2=\|f\|^2=(Ef, f);$$

如果 $f\perp\mathbf{M}$，则

$$(U^*Uf, f)=0=(Ef, f).$$

由此得知对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 有 $(U^*Uf, f)=(Ef, f)$，这蕴涵 $U^*U=E$.

反之，假设 U 是一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的有界线性变换，它使得 $E=U^*U$ 是一个投影，以 $\mathbf{H}$ 为定义域，$\mathbf{M}$ 为值域. 由此，对一切 f 有

$$\|Uf\|^2=(U^*Uf, f)=(Ef, f)=\|Ef\|^2,$$

从而视 $f\in\mathbf{M}$ 或 $f\perp\mathbf{M}$ 而有 $\|Uf\|=\|f\|$ 或 $Uf=0$.

要证明系 1，只须注意到 $\ker U^*U=\ker U$（这对每一个有界线性变换 U 成立）. 系 2 的证明包含特殊的技巧. 如果 U^*U 是幂等元，则 $(UU^*)^3=U(U^*UU^*U)U^*=(UU^*)^2$；而谱定理蕴涵：满足 $A^3=A^2$ 的自伴算子 A 是幂等的. 注意到 $(\ker UU^*)^\perp=(\ker U^*)^\perp=\operatorname{ran}U$，（由于 $\operatorname{ran} U$ 是闭的）便得到关于始和终空间的断语. 再证系 3：如果 U 是部分等距变换，则 U 与投影 U^*U 的乘积在 $\ker U$ 及其正交补上都与 U 全同；如果，反之，$U=UU^*U$，则在两边的前面乘以 U^* 便得 U^*U 幂等的结论.

解 99. 如果 U 是等距算子，且 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$，则 $\mathbf{M}$ 约化 U；如果 U 是共轭等距算子且 $\mathbf{M}$ 约化 U，则 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$. 对共轭等距算子说，第一个蕴涵关系非真；对等距算子说，第二个蕴涵关系非真.

证. 如果 $U^*U=1$ 且 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$，则 $U^*\mathbf{M}=U^*U\mathbf{M}=\mathbf{M}$. 如果

$UU^*=1$ 又 $U\mathbf{M}\subset\mathbf{M}$ 且 $U^*\mathbf{M}\subset\mathbf{M}$，则施行 U 于第二包含式便得到第一包含式的反向包含式.

如果 U 是单侧移位的伴随算子而 $\mathbf{M}$ 是属于非 0 特征值的(一维)特征子空间(参看解 67)，则第一蕴涵关系非真. 此时 $U\mathbf{M}=\mathbf{M}$，但 $\mathbf{M}$ 不约化 U. 如果 U 是单侧移位而 $\mathbf{M}$ 是全空间，则第二蕴涵关系非真. 此时 $\mathbf{M}$ 约化 U，但 $U\mathbf{M}\neq\mathbf{M}$.

解 100. 关于闭性的断语是显然的，理由是(1)映射 $A\to AA^*A$ 是连续的，且(2)方程 $A=AA^*A$ 刻划了部分等距算子.

套用同样的证法可以证明，甚至更容易地证明等距算子全体的集是闭的，考虑映射(1) $A\to A^*A$ 和方程(2) $A^*A=1$ 好了.

这个评论与非 0 部分等距算子全体的集是否连通的问题有关. 这个问题的答案是"否"，证明这一点的一个方法是去证明等距算子全体的集在部分等距算子全体的集中(在后者的相对拓扑中)不但是闭的，也还是开的. 事实是这样：如果部分等距算子充分接近于一个等距算子，它也必是一个等距算子. 更准确地说，如果 U 是部分等距算子，而 V 是等距算子，且 $\|U-V\|<1$，则 U 必是等距算子. 只须证明：如果 $Uf=0$，则 $f=0$，其实，由于 $\|f\|=\|Vf\|=\|Uf-Vf\|\leqslant\|U-V\|\cdot\|f\|$，得知如果 $f\neq0$，则 $\|U-V\|\geqslant1$，这和 $\|U-V\|<1$ 的假设矛盾.

用同一推理可以证明：如果基础希耳伯特空间是无穷维的，则等距算子全体的集也不是连通的. 理由：酉算子全体的集是一个既开又闭的非空真(!)子集.

解 101. U 的核和 V 的始空间只能以 0 为公共元. 的确，如果 f 是一个非 0 矢量，它使得 $Uf=0$ 而 $\|Vf\|=\|f\|$，则 $\|Uf-Vf\|=\|f\|$，这和假定 $\|U-V\|<1$ 矛盾. 由此得知，U 在 V 的始空间上的限制是一对一的，从而(问题 42) V 的始空间的维数小于或等于 U 的整个值域的维数. 换句话说，这个结果就是说 $\rho(V)\leqslant\rho(U)$；利用对称性即可得到关于秩的断语.

关于零秩的断语可以叙述如下：如果 $\nu(U)\neq\nu(V)$，则 $\|U-V\|\geqslant1$. 的确，如果 $\nu(U)\neq\nu(V)$，为了确定性，不妨设 $\nu(U)<$

$\nu(V)$,则在 V 的核中至少存在一个正交于 U 的核的单位矢 f. 说 f 正交于 U 的核同于说 f 属于 U 的始空间. 由此得知 $1=\|f\|=\|Uf\|=\|Uf-Vf\|\leqslant\|U-V\|$,关于零秩的断语已证完.

关于余秩的断语是一个容易的推论: 如果 $\|U-V\|<1$, 则 $\|U^*-V^*\|<1$,所以 $\rho'(U)=\nu(U^*)=\nu(V^*)=\rho'(V)$.

以上结果关于投影的特例 (实即问题 43) 见于 Riesz-Nagy [1952, § 105]. 目前的陈述是一个推广, 同时证明也有相当程度的简化. 可是 Riesz-Nagy 的证明则是较构造性的; 它不但证明那两个子空间有相同维数, 且展示一个以第一子空间为始空间, 以第二子空间为终空间的部分等距算子. 推广了的陈述见于 Halmos-McLaughlin [1962].

解 102. 假设 V_1 和 V_2 是具有相同的秩, 余秩和零秩的部分等距算子; 令 $\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 表示它们的核, $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 表示它们的始空间, $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 表示它们的值域. 令 U 表示任意的一个把 $\mathbf{N}_1$ 映射到 $\mathbf{N}_2$ 上, 把 $\mathbf{M}_1$ 映射到 $\mathbf{M}_2$ 上的酉算子. 令 W 表示一个把 $\mathbf{R}_1^\perp$ 等距地映射到 $\mathbf{R}_2^\perp$ 上的线性变换; 对于 $\mathbf{R}_1$ 中的 f, 我们再定义 $Wf=V_2UV_1^*f$. 由于容易验证这个定义产生一个把 $\mathbf{R}_1$ 等距地映射到 $\mathbf{R}_2$ 上的线性变换 W, 可以推知存在一个如上所述地把 $\mathbf{R}_1$ 映射到 $\mathbf{R}_2$ 上且把 $\mathbf{R}_1^\perp$ 映射到 $\mathbf{R}_2^\perp$ 上的酉算子 W. 如果 $g\in\mathbf{N}_1$, 则

$$WV_1g=0=V_2Ug;$$

如果 $g\in\mathbf{M}_1$, 则

$$WV_1g=V_2UV_1^*V_1g=V_2Ug.$$

由此得知 $WV_1=V_2U$, 或 $WV_1U^*=V_2$. 如果 $t\to W_t$ 和 $t\to U_t$ 分别是把 1 连结到 W 和连结到 U 的酉算子的连续曲线, 则 $t\to W_tV_1U_t^*$ 是一条把 V_1 连结到 V_2 的部分等距算子的连续曲线, 这曲线上的部分等距算子全都具有相同的秩、余秩和零秩.

这个证明是 Halmos-McLaughlin [1962] 的证明的简化, 它属于 R. G. Douglas.

解 103. 假设 A 与 B 酉等价. 如果 U 是把 A 变换成 B 的酉算子, 则 U 把 A^* 变换成 B^*, 因此 U 把 $A'=\sqrt{1-AA^*}$ 变换成

$B'=\sqrt{1-BB^*}$；由此得知

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

把 $M(A)$ 变换成 $M(B)$。

其次，A 和 B 是可逆的且 $M(A)$ 与 $M(B)$ 酉等价．$M(A)$ 的值域由形如 $\langle Af+A'g,\ 0\rangle$ 的序对全体组成．该集包含于第二坐标为 0 的序对全体的集；A 的可逆性蕴涵 $M(A)$ 的值域恰由第二坐标为 0 的序对全体组成．由于同理对 $M(B)$ 也成立，得知把 $M(A)$ 变换成 $M(B)$ 的酉算子矩阵把由形如 $\langle f,\ 0\rangle$ 的矢量全体组成的子空间映射成其自身．这蕴涵该子空间约化每一个这样的酉算子矩阵（参看解 99），从而每一个这样的酉算子矩阵是对角的．由于对角的酉矩阵的对角线元素必是酉算子，得知如果 $M(A)$ 与 $M(B)$ 酉等价，则 A 与 B 也是这样．

解 104. *如果闭单位圆域的紧子集 Λ 含有原点，则必存在一个部分等距算子以 Λ 为其谱.*

证. 令 A 表示以 Λ 为其谱的一个压缩算子（参看问题 48）．如果就象问题 103 那样，

$$M=\begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $A'=\sqrt{1-AA^*}$，则 M 是一个部分等距算子；它有什么样的谱？这问题可以约化为：对 λ 的哪些值，算子矩阵

$$M-\lambda=\begin{pmatrix} A-\lambda & A' \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

是不可逆的？由于 M^* 把第一坐标为 0 的每一个序对变为 0，得知 0 属于 M^* 的谱，从而它也属于 M 的谱．如果 $\lambda\neq 0$，则可应用问题 56．结论是 λ 属于 M 的谱当且只当 λ 属于 A 的谱．小结：$\Lambda(M)=\Lambda\cup\{0\}=\Lambda$.

在有限维的情形可以得到更多结论．如果 Λ 是闭单位圆域的有限子集，0 属于 Λ，又若对 Λ 的每一元素各指定给一个正整数作为重数，则存在一个部分等距算子以 Λ 为谱且其各特征值的

代数重数恰取所指定的值；参看 Halmos-McLaughlin[1962]．

解 105． 先从 P 的构造开始．由于 A^*A 是 $\mathbf{H}$ 上的正算子，它有(唯一的)正平方根；称之为 P．由于对 $\mathbf{H}$ 中一切 f 有

$$\|Pf\|^2=(Pf,\ Pf)=(P^2f,\ f)=(A^*Af,\ f)=\|Af\|^2,$$

得知方程

$$UPf=Af$$

无疑义地定义一个从 P 的值域 $\mathbf{R}$ 到空间 $\mathbf{K}$ 的一个线性变换 U，且 U 在 $\mathbf{R}$ 上是等距的．由于 U 在 $\mathbf{R}$ 上有界，它有唯一的到闭包 $\overline{\mathbf{R}}$ 上的有界扩张，而从 $\overline{\mathbf{R}}$，它又可以唯一地扩张成从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的以 $\overline{\mathbf{R}}$ 为始空间的部分等距变换．根据构造法，方程 $A=UP$ 成立．部分等距变换的核是它的始空间的正交补，而自伴算子的值域的正交补是它的核．这蕴涵 $\ker U=\ker P$，存在性的证明已经完成．

为了证明唯一性，假设 $A=UP$，U 是一个部分等距变换，P 是正算子，且 $\ker U=\ker P$．由此知 $A^*=PU^*$，从而

$$A^*A=PU^*UP=PEP,$$

其中 E 是 $\mathbf{H}$ 到 U 的始空间上的投影．由于该始空间等于 $(\ker U)^\perp$，从而等于 $\overline{\operatorname{ran} P}$，得知 $EP=P$，从而 $A^*A=P^2$．由于方程 $UPf=Af$ 对于 $\operatorname{ran} P$ 中的 f 唯一地确定了 U，又由于当 f 在 $\ker P$ 中时 $Uf=0$，得知 U 也被上面所说的条件唯一地确定．

要推出系 1，可以 U^* 左乘方程 $A=UP$，并利用方程 $U^*U=E$；参看解 98．对于系 2，注意 $\ker U=\ker P=\ker A^*A=\ker A$，且 $\ker U^*=(\operatorname{ran} U)^\perp=(\operatorname{ran} A)^\perp$．

解 106． 假设 A 是从希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 到希耳伯特空间 $\mathbf{K}$ 的有界线性变换，令 $A=UP$ 表示 A 的极分解，令 $\mathbf{M}(\subset\mathbf{H})$ 表示部分等距变换 U 的始空间，并令 $\mathbf{R}(\subset\mathbf{K})$ 表示 U 的值域(或等价地说，A 的值域的闭包)．如果 $\dim \mathbf{M}^\perp\leqslant\dim \mathbf{R}^\perp$，则存在(许多)从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的等距变换，它们在 $\mathbf{M}$ 上与 U 全等；为此，只须把 $\mathbf{M}^\perp$ 等距地映射到 $\mathbf{R}^\perp$ 中并且把这样的映射与 U 限制在 $\mathbf{M}$ 上的映射结合起来．另一方面，如果 $\dim \mathbf{R}^\perp\leqslant\dim \mathbf{M}^\perp$，则存在许多从 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的等距变换，它们在 $\mathbf{R}$ 上与 U^* 全等；每一个这样的等

距变换的伴随变换是从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的共轭等距变换，它在 $\mathbf{M}$ 上与 U 全等．不论是那一种情况，都存在一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 的线性变换 V 使得 V 或 V^* 是一个等距变换且使 V 在 $\mathbf{M}$ 上与 U 全等．由于 P 的值域包含于 $\mathbf{M}$，得知 $VP=UP=A$．

解 107．希耳伯特空间上的算子组成的空间中，单位球的端点就是极大部分等距算子．

证．首先假设 U 是一个等距算子且 $U=\alpha A+\beta B$，这里的 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta=1$，$\|A\|\leqslant 1$ 且 $\|B\|\leqslant 1$．如果 f 是单位矢量，则 Uf 也是如此，且 $Uf=\alpha Af+\beta Bf$，这里的 $\|Af\|\leqslant 1$，$\|Bf\|\leqslant 1$．由于希耳伯特空间的单位球是严格凸的(问题 3)，可以推知 $Af=Bf=Uf$，从而知 $A=B=U$，结论：等距算子都是端点．关于共轭等距算子的结果可以由此直接推得．

逆定理可以这样证明，即证每一合乎 $\|A\|\leqslant 1$ 的算子 A 等于两个上面已经得到的那一类端点的一个凸组合(事实上，等于它们的平均)．极分解理论（说是它的一个推论更好些）在这里有用．据问题 106，有可能得 $A=VP$，这里，V 是一个极大部分等距算子而 $0\leqslant P\leqslant 1$．(P 的上界的合理性可由 $\|A\|\leqslant 1$ 得到肯定．)断语：存在一个酉算子 W 使得 $P=\frac{1}{2}(W+W^*)$．(当 $-1\leqslant P\leqslant 1$ 时，这断语都是真的，下面的证明也是有效的；在基础希耳伯特空间是一维的情形，断语及其证明有简单的几何意义．)要证明该断语，只要记

$$W=P+i\sqrt{1-P^2},$$

然后验证一切如我们所想．现在，由于 $A=VP$ 且 $P=\frac{1}{2}(W+W^*)$，得知 $A=\frac{1}{2}(VW+VW^*)$．由于极大部分等距算子与酉算子的乘积是极大部分等距算子，证完．

Kadison[1951] 曾经证明，某些算子代数的单位球中的端点是这样的一些部分等距算子 U，它们对该代数中的一切 A 满足恒等式

$$(1-U^*U)A(1-UU^*)=0.$$

对于一个希耳伯特空间上的算子全体所成代数说，这和上面刚证明了的结论是相容的．的确，很清楚，如果 U 或 U^* 是一个等距算子，Kadison 条件能被满足．假设，反过来，已知该条件被满足，并假定 $1-U^*U\neq 0$；待证的是 $1-UU^*=0$．换句话说，待证的是：如果对某些 f，$(1-UU^*)f\neq 0$，则对一切 g 有 $(1-U^*U)g=0$．这是容易的：给定 g，求一个算子 A，使得 $A(1-UU^*)f=g$．

解 108．记 $UP=A$．如果 U 与 P 可交换，则 U 与 P^2 可交换；由于 P 也与 P^2 可交换，得知 $A(=UP)$ 与 $A^*A(=P^2)$ 可交换．

逆定理比较困难．如果 A 是拟正规的，则 A 与 $P^2(=A^*A)$ 可交换．从函数演算的最初等部分可以推知 A 与 P 可交换．（与问题 95 比较，在那里证明了正算子的正平方根是一个该算子的多项式的序列的弱极限．还有一种方法：应用以多项式逼近连续函数的 Weierstrass 定理证明"弱"可以"一致"代之）．这就是说 $(UP-PU)P=0$，因此 $UP-PU$ 在 $\operatorname{ran}P$ 上取值 0．由于 $\ker P=\ker U$，$UP-PU$ 在 $\ker P$ 上也取值 0 是显易不足道的．由此得知 $UP-PU=0$．

解 109．据问题 106，每一算子可取形式 VP，这里的 V 是一个极大部分等距算子而 P 是正算子．任给正数 ε，可求一个可逆算子 Q（可以使它成为正的，如果这样要求它）使得 $\|P-Q\|<\varepsilon$．由此得 $\|VP-VQ\|<\varepsilon$．注意到如果 V 是一个极大部分等距算子，则 V 是单侧可逆的（如果 V 是等距算子，则是左可逆的；如果 V^* 是等距算子，则是右可逆的）以及单侧可逆算子与可逆算子的积是单侧可逆的，关于单侧可逆算子的稠密性定理的证明便告完成．

为要得到关于可逆算子的否定结论，考虑一个单侧可逆但非可逆的算子 A（例：单侧移位）．断语：存在 A 的一个邻域，其中不包含可逆算子．假定（不失普遍性）A 有一个左逆 B，$\|B\|\leqslant 1$．在这样规范化后，上述断语可以说得更精确些：以 A 为中心且半径

为 1 的开球中不包含可逆算子. 现在,为得到证明,首先注意到 B 非可逆, 因为如果它是可逆的, 则将有 $A=B^{-1}BA=B^{-1}$, 从而 A 将是可逆的. 待证的是如果 $\|A-T\|<1$, 则 T 是不可逆的. 其实:

$$\|1-BT\|=\|B(A-T)\|\leqslant\|A-T\|<1,$$

从而 BT 可逆; 这蕴涵如果 T 可逆, 则 B 将是可逆的, 但事实上它不是.

解 110. 证明的一个方法是指明: 对每一可逆算子 A, 存在一个把它连结到恒等算子的连续曲线. 为此目的, 可考虑 A 的极分解 UP. 由于 A 可逆, U 和 P 也是如此. 由此知 U 是酉算子而 P 是严格正的. 用一个酉算子的连续曲线 $t\to U_t$(参看问题 102)把 U 连接到 1, 又相似地, 用一个严格正算子的连续曲线 $t\to P_t$ 把 P 联结到 1. (后者甚至不必用到谱定理; 考虑 $tP+(1-t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.) 如果 $A_t=U_tP_t$, 则 $t\to A_t$ 是一个可逆算子的连续曲线, 它把 $A(=A_1)$ 联结到 $1(=A_0)$.

第十四章 单侧移位

解 111. 如果 $\mathbf{H}$ 是不可分的, 则它是若干约化 A 的可分无穷维空间的直接和, 因此, 先假定 $\mathbf{H}$ 是可分的不至有损于普遍性. 在可分希耳伯特空间中一切无穷维子空间都有相同的维数; 所以断语正是说 $\mathbf{H}$ 是 $\aleph_0$ 个约化 A 的无穷维子空间的直接和. 在此断语中把 $\aleph_0$ 改为 2, 然后证明它就足够了. 换句话说, 只须证明: *对于可分无穷维希耳伯特空间上的每一正规算子, 存在一个约化子空间使得它以及它的正交补都是无穷维的.* 的确, 如果这断语是真的, 则存在 $\mathbf{H}$ 的约化 A 的子空间 $\mathbf{H}_1$ 使得 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_1^\perp$ 都是无穷维的. 重用所得结果 (考虑 A 在 $\mathbf{H}_1$ 上的限制) 可推得存在 $\mathbf{H}_1^\perp$ 的约化 A 的子空间 $\mathbf{H}_2$ 使得 $\mathbf{H}_2$ 和 $\mathbf{H}_1^\perp\cap\mathbf{H}_2^\perp$ 都是无穷维的. 归纳地进行下去可得到两两正交的无穷维约化子空间的无穷序列

$\{\mathbf{H}_n\}$. 如果交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{H}_n^{\perp}$ 非零,可把它与(譬如说)$\mathbf{H}_1$ 合并起来.

剩下的是要证明上面所指出的断语. 谱定理指明,无损于一般性,可限于注意某测度空间上有界可测函数 φ 所诱导的乘法算子 A. 对于复平面的每一波雷耳子集 M,令 $E(M)$ 表示由 $\varphi^{-1}(M)$ 的特征函数诱导的乘法算子;算子 $E(M)$ 是投影到在 $\varphi^{-1}(M)$ 以外取零值的函数组成的子空间上的投影. 很清楚,每一 $E(M)$ 与 A 可交换,就是说,每一 $E(M)$ 的值域约化 A. 如果对于某些 M, $E(M)$ 和 $1-E(M)$ 都有无穷维的值域,所期望的断语便是真的.

如其不然,则必出现这样的情况:对于每一 M, $E(M)$ 或 $1-E(M)$ 中必有有限秩者. 在复平面上,画一序列越来越精细的正方格栅,并令每一格栅中的每一正方形充当 M. 由此知如果 $E(M)$ 有正的秩,则 M 至少含有一点 λ 使 $E(\{\lambda\})$ 有正的秩. 不可能有无穷多个这样的 λ,否则可把它们分成两个无穷子集,而这与本段的主要假定矛盾. 结论:至少存在一点 λ 使得 $E(\{\lambda\})$ 的值域是无穷维的;令 $\mathbf{M}$ 表示该值域. A 在 $\mathbf{M}$ 上的限制是一个倍乘算子而因此被 $\mathbf{M}$ 的每一子空间所约化. 把 $\mathbf{M}$ 分裂成两个无穷维子空间 $\mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{M}_1$ (的直接和);如果 $\mathbf{H}_0=\mathbf{M}_0$ 且 $\mathbf{H}_1=\mathbf{M}_1\vee\mathbf{M}^{\perp}$,则 $\mathbf{H}_0$ 和 $\mathbf{H}_1$ 具备所要求的一切.

解 112. 无穷维希耳伯特空间上的每一个酉算子是四个对称的乘积;仅有三个(对称)一般是不够的.

如果基础希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 是有限维的,则行列式概念有意义. 由于对称的行列式等于 ±1,得知具有非实行列式的酉算子不可能是对称的乘积.

证. 假设 $\mathbf{H}$ 是一个无穷维希耳伯特空间,开始时先把 $\mathbf{H}$ 表示成等维数子空间序列 $\{\mathbf{H}_n\}$ 的直接和,这些子空间的每一个都约化所给酉算子 U(问题 111). 为方便计,下标应跑遍一切整数,正的、负的和 0.

相对于固定的直接和分解式 $\mathbf{H}=\sum_n\mathbf{H}_n$, 定义右移位为使得

$S\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_{n+1}$ 的酉算子 S，并定义左移位为使得 $T\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_{n-1}$ 的酉算子 T，$n=0$，±1，±2，…．所有 $\mathbf{H}_n$ 的等维数性保证了这些移位的存在．如果 S 是任意的一个右移位，记 $T=S^*U$．由于对于一切 n，$T\mathbf{H}_n=S^*U\mathbf{H}_n=S^*\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_{n-1}$，得知 T 是一个左移位．由于 $U=ST$，可知每一个酉算子是两个移位的乘积；只须再证每一个移位是两个对称的乘积，证明便告完成．

由于左移位的逆（等价地说，其伴随算子）是一个右移位，因此考虑右移位便够了．于是可假设 S 是一个右移位；令 P 表示在 $\mathbf{H}_n$ 上等于 S^{1-2n} 的算子，令 Q 表示在 $\mathbf{H}_n$ 上等于 S^{-2n} 的算子（$n=0$，±1，±2，…）．如果 $f\in\mathbf{H}_n$，则 $Qf=S^{-2n}f\in S^{-2n}\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_{-n}$，因此 $PQf=PS^{-2n}f=S^{1-2(-n)}S^{-2n}f=Sf$．存在性证完．

为证明在每一个希耳伯特空间上存在着不是三个对称的乘积的酉算子，令 ω 表示一个 1 的非实立方根，并令 U 表示 ωI．算子 U 属于酉算子全体的群的中心；U 在该群中的阶恰为三．证明的其余部分已与算子理论无关；待证的是，在任何群中，3 阶的中心元素不可能是三个 2 阶元素的积．假设果有中心元素 u 使得 $u=xyz$，这里的 $x^2=y^2=z^2=1$；则有

$$u^4=ux\,uy\,uz=u(xu)y(uz)=u(yz)y(xy)$$
$$=y(uz)y(xy)=yxy\cdot yxy=1.$$

参考：Halmos-Kakutani[1958]．

解 113．(a) 单侧移位不是有限个正规算子的乘积．(b) 单侧移位的实部和虚部的范数都是 1．(c) 从单侧移位到正规算子的集的距离是 1．

证．(a) 主要工具是这样的事实，即如果正规算子有单侧逆，它必有逆．（证：对每一算子说，左可逆性同于下有界，参看解 70，(2)；对正规算子说，下有界同于其伴随算子的下有界．）假设真的有 $U=A_1\cdots A_n$，这里的 U 是单侧移位而 A_1，…，A_n 是正规算子．由于 $U^*=A_n^*\cdots A_1^*$，得知 $A_n^*\cdots A_1^*A_1\cdots A_n=1$，从而 A_n 左可逆．根据前面的评论，这蕴涵 A_n 是可逆的，所以 A_n^* 也是这样．可以从一个乘积的任一端去掉可逆算子而不改变其可逆（或不可逆）性．

通过一个显然的归纳步骤，重复上面的论证，得知每一个 A 是可逆的，因此 U 是可逆的．这是一个矛盾，从而证完．

(b) 如果 U 是单侧移位，又 $A=\frac{1}{2}(U+U^*)$，则显然有 $\|A\|\leqslant 1$．由于 1 是 U 的近似特征值，存在一个单位矢量序列 $\{f_n\}$ 使得 $Uf_n-f_n\to 0$．施以 U^* 并改变符号得 $U^*f_n-f_n\to 0$．相加并除以 2，得 $Af_n-f_n\to 0$．结论：1 是 A 的近似特征值，因此 $\|A\|\geqslant 1$．为得到关于虚部的结果，注意如果 $U=A+iB$，则 $-iU=B-iA$，且 $-iU$ 酉等价于 U（参看问题 75）．

(c) 存在一个距离 U 不大于 1 的正规算子（即 0），这是显易不足道的；求证断语的比较不显易的部分是，如果 A 正规，则 $\|U-A\|\geqslant 1$．如果 A 是可逆的，这从解 109 即得；那里的断语蕴涵以 U 为中心 1 为半径的开球不含有可逆算子．一般情形的解现在已很明显：可逆正规算子的集在正规算子全体的集中稠密．

解 114． 单侧移位没有平方根．

证． U^* 倒比 U 更易处理，当然，同样可以得到求证的结论．因此假设存在 $V^2=U^*$，并令 $\mathbf{N}_0$ 表示 U^* 的（一维的）核．由于 $\ker V\subset\ker V^2=\mathbf{N}_0$，得知 $\dim\ker V\leqslant 1$．如果 $\ker V$ 是平凡（零维）的，$\ker U^*$ 也将是这样；由此推知 $\dim\ker V=1$，从而 $\ker V=\mathbf{N}_0$．由于 U^* 把全空间映到其自身上，V 也必然如此．由此得知特别是 $\mathbf{N}_0$ 应包含于 V 的值域，从而存在一个矢量 f 使得 Vf 是 $\mathbf{N}_0$ 的一个非零元，由于 $\mathbf{N}_0$ 是 V 的核，这蕴涵 $V^2f=0$，即 $U^*f=0$，从而 $f\in\mathbf{N}_0$．再用此法：由于 $\mathbf{N}_0$ 是 V 的核，这蕴涵 $Vf=0$，与当初 f 的选法矛盾．结论：不存在这样的 V．

类似的否定结果首先由 Halmos–Lumer–Schäffer [1953] 得到，该处应用的技巧在这里也适用．上面所给的简单得多的证明属于 J. G. Thomson．Deckard–Pearcy [1963] 和 Schäffer [1965] 对平方根问题做出了进一步的有趣的贡献．

解 115． 显然，$\mathbf{L}^2$ 上的每一乘法算子与 W 可交换．如果 A 是由有界可测函数 φ 诱导出的乘法算子，则

$$Ae_0 = \varphi \cdot e_0 = \varphi.$$

这说明如果我们企图证明某算子 A 是 $\mathbf{L}^2$ 上的乘法算子，要确定乘子，只能有唯一的选择：如果有这样的乘子，它必定是 Ae_0.

现在假设 $AW=WA$，且置 $\varphi=Ae_0$. 第一个（事实上也是主要的）难点是要证明 φ 是有界的；下面是证明方法之一. 如果 ψ 是任意的一个有界可测函数，且 B 是它诱导的乘法，则在通常意义下的正规算子的函数演算中，$B=\psi(W)$. 由于 W 与 A 可交换，因此 W 的每一函数与 A 可交换，从而特别有，B 与 A 可交换；由此推知

$$\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi = B\varphi = BAe_0 = ABe_0 = A\psi.$$

W 的每一函数与 A 可交换的陈述不是不足道的；它就是关于正规算子的 Fuglede 可交换性定理. （参看 Halmos[1951, p.68] 和问题 152.）我们当前的论证中没有必要用到一切有界可测函数；只要用三角多项式（即诸 e_n 的有限线性组合）就足够了. 但即使如此，还要利用 Fuglede 定理，要用它证明如果 W 与 A 可交换，则 W^* 与 A 可交换.

到这里，几乎可以应用问题 50 了. 那里的前提是 A 是一个 $\mathbf{L}^2$ 上使得对一切 $\mathbf{L}^2$ 中的 f 有 $Af=\varphi\cdot f$ 的算子；而现在的情况是 A 是一个 $\mathbf{L}^2$ 上使得对一切有界可测的 ψ 有 $A\psi=\varphi\cdot\psi$ 的算子. 这个差别的确相当大，大致使该问题的解中的一个证明失效了，但它还不是太大，还不至于使另一个证明，较"自然"的那个证明也失效. 结论：φ 是有界的.

证明的其余部分是不足道的. 由于 φ 有界，它诱导出一个乘法算子；由于这个乘法算子在有界函数全体所成的稠密集上与 A 等同；它必定到处与 A 等同.

为要证明系，可注意如果乘法是一个投影，则乘子是一个特征函数.

解 116. 正如在解 115 中那样，我们必须置 $\varphi=Ae_0$ 并试图证明 φ 即待求的乘子. 由于对每一 n，以 e_n 乘 $\mathbf{H}^2$ 保持 $\mathbf{H}^2$ 不变 $(n=0, 1, 2, \cdots)$，得知 $\varphi\cdot e_n\in\mathbf{H}^2$. 由于还有

$$\varphi\cdot e_n=e_n\cdot\varphi=U^n\varphi=U^nAe_0=AU^ne_0=Ae_n,$$

得知对于每一个多项式 p, 乘积 $\varphi\cdot p$ 属于 $\mathbf{H}^2$ 且 $\varphi\cdot p=Ap$. 如果已知 φ 是有界的,证明便告完成(由 φ 诱导出的乘法算子在一个稠密集上与 A 全同). 又如果已知对于 $\mathbf{H}^2$ 中一切 f 有 $\varphi\cdot f=Af$, 则 φ 将是有界的(参看解 50 中最后一个评论). 由于此刻这些"如果"都不是已知的,就必须去证明某些东西. 最省事的办法似乎就是采用(率直地说,是去重复)解 51 中使用的第二个证明.

如果 $f\in\mathbf{H}^2$,则存在多项式 p_n 使得 $p_n\to f$ (在 $\mathbf{H}^2$ 中); 由此当然有 $Ap_n\to Af$(在 $\mathbf{H}^2$ 中). 不失一般性可假定 $p_n\to f$ 几乎处处成立且 $Ap_n\to Af$ 几乎处处成立; 如果这对序列 $\{p_n\}$ 不成立, 也必定对于某一适当的子序列成立. 由于 $p_n\to f$ 几乎处处成立, 得知 $\varphi\cdot p_n\to\varphi\cdot f$ 几乎处处成立; 由于同时有 $\varphi\cdot p_n\to Af$ 几乎处处成立, 得知 $\varphi\cdot f=Af$ 几乎处处成立.

这个用过了两次的证明中有两层思想: (1) 如果一个闭变换在一个稠密集上与一个有界变换相等, 则它必是有界的, (2) 乘法恒是闭的.

系等价于: 如果 E 是与 U 可交换的投影, 则 $E=0$ 或 $E=1$. 上面所证明的结果蕴涵 E 是一个乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制, 该乘法的乘子本身属于 $\mathbf{H}^\infty$. 由于 $\mathbf{H}^2$ 上的幂等乘法一定是由幂等乘子诱导出的 (施于 e_0 即得), 该乘子必是某集的特征函数, 从而特别必须是实的; 从问题 26 即得所期望的结果.

附带地说,该系并不一定要从主断语演绎出来; Halmos[1951, p. 41] 有一个容易的直接证明可供参考.

解 117. 设 U 是单侧移位,表示成由 e_1 诱导出的乘法在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制; 例如可参看问题 116. 如果 A 与 U 可交换, 则(据问题 116)存在 $\mathbf{H}^\infty$ 中一个函数 φ 使得对 $\mathbf{H}^2$ 中一切 f 有 $Af=\varphi\cdot f$. 关键性的工具是, φ 是一个多项式序列 $\{p_n\}$ 的极限使得对每一个 n 有 $\|p_n\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_\infty$, 参看解 33. 由此知如果 $f\in\mathbf{H}^2$, 则几乎处处有

$$|p_n(z)f(z)|\leqslant\|\varphi\|_\infty\cdot|f(z)|.$$

由于 $p_n\cdot f\to\varphi\cdot f$ 几乎处处成立, 勒贝格控制收敛定理可适用; 结

论是 $p_n \cdot f \to \varphi \cdot f$（在 $\mathbf{H}^2$ 中）．由于乘以 p_n 的乘法是一个 U 的多项式（就是 $p_n(U)$），证完．

解 118．希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的等距算子 V 如果不能成为酉算子，其唯一原因是它把 $\mathbf{H}$ 映射到 $\mathbf{H}$ 的一个真子空间上．这提示我们，$V\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{H}$ 的差异度是 V 的非酉性的一个有用的度量．施行 V 一次将 $\mathbf{H}$ 压缩成 $V\mathbf{H}$，再施行一次 V 将 $V\mathbf{H}$ 压缩成 $V^2\mathbf{H}$，如此类推．$\mathbf{H}$ 的不可压缩的核心该就是所有 $V_n\mathbf{H}$ 的公共部分．这是真的，而问题的关键在于：待证明的主要论点就是这个核心约化了算子 V．稍为锋锐的结论有时是有用的；最好能准确地知道该核心的正交补是什么．记 $\mathbf{N}=(V\mathbf{H})^{\perp}$；待证的主要结果用 $\mathbf{N}$ 表述就是

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{H}=\bigcap_{n=0}^{\infty}(V^n\mathbf{N})^{\perp}.$$

如果用通常集论上的余集取代正交补，这个陈述（以及下面的证明都）变成直观上显然的．（画一个图，将有助益．）

首先观察到对一切子空间 $\mathbf{M}$ 有 $V\mathbf{M}^{\perp}\subset(V\mathbf{M})^{\perp}$（的确，如果 $f\in\mathbf{M}^{\perp}$，从而 Vf 是 $V\mathbf{M}^{\perp}$ 的一个典型元素，又如果 $g\in\mathbf{M}$，从而 Vg 是 $V\mathbf{M}$ 是的一个典型元素，则由于 V 是等距算子，从 $f\perp g$ 即得 $Vf\perp Vg$）．这蕴涵

$$V^{n+1}\mathbf{H}=V^n(V\mathbf{H})=V^n\mathbf{N}^{\perp}\subset(V^n\mathbf{N})^{\perp},$$

这就解决了证明的一半．关于反向的包含式，可假定 $f\in\bigcap_{n=0}^{\infty}(V^n\mathbf{N})^{\perp}$，然后用归纳法证明对一切 n 有 $f\in V^n\mathbf{H}$．如果 $n=0$，这是不足道的．如果 $f\in V^n\mathbf{H}$，因此对某一 g 有 $f=V^ng$，则 $V^ng\perp V^n\mathbf{N}$（由于 $f\in(V^n\mathbf{N})^{\perp}$），所以 $g\perp\mathbf{N}$．这蕴涵 $g\in V\mathbf{H}$，从而 $f\in V^{n+1}\mathbf{H}$，如所期望．上所断言的等式已证完．

剩下的就容易了．显然，$\bigcap_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{H}$ 在 V 下不变；由于根据刚才证明的结果，它的正交补等于 $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{N}$，后者也在 V 下不变，得知 $\bigcap_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{H}$ 约化 V．V 在这个约化子空间上的限制是一个酉

算子(因为它是个等距算子且其值域等于其定义域). V 在正交补 $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n\mathbf{N}$ 上的限制是许多个单侧移位的摹本 (Copies) 的直接和, 摹本的个数就是 $\dim \mathbf{N}$.

解 119. *如果 U 是单侧移位, 则对每一个酉算子 V, 有 $\|U-V\|=2$.*

试观察如果 -1 属于算子 A 的谱, 则 -2 属于 $A-1$ 的谱, 并从此着手证明. 由此得知, 如果 A 是非正规 (即非酉的) 等距算子, 则 $r(A-1)\geqslant 2$, 从而 $\|A-1\|\geqslant 2$. (利用问题 118, 并记起单侧移位的谱是闭单位圆域.) 如果 V 是酉算子, 则 $\|U-V\|=\|V^*U-1\|$. 由于 V^*U 是一个非正规等距算子, 得知 $\|U-V\|\geqslant 2$; 反向不等式是不足道的.

在几何上这是一个很奇特的结果. 单侧移位在算子空间的单位球 (面) 上, 每个酉算子也是如此. 刚才证明的结果可以用几何语言表达为如果 V 是酉算子, 则 U 和 V 是对径的; 它们的距离使得它们就象位于一条直径的相对的两端点似的. 奇特的是这对每一个 V 都是真的.

解 120. *存在着可交换的等距算子 U_0 和 V_0 使得 U_0 的酉部分的定义域不约化 V_0.*

证. 令 U_0 表示单侧移位与无穷多个双侧移位的直接和; 令 V_0 表示一个等距算子, 它把(U_0 的) 单侧部分的定义域移植于第一个双侧部分的定义域且把各双侧部分的定义域向前推移. 为把这段叙述通过计算式说明白, 令 U 表单侧移位, 记 $E=1-UU^*$, 并定义 U_0 和 V_0 为无穷算子矩阵

$$U_0=\begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & U \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad V_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(注意：V_0 中诸 0 和 1 都是算子，与 U_0 的对应元素同样大小.)通过计算可证明 $U_0V_0=V_0U_0$. U_0 的酉部分的定义域在尾端(第一坐标为 0 的矢量全体)；很明显，尾端的正交补(第一坐标以后诸坐标都为 0 的矢量全体)在 V_0 下非不变.

把 U_0、V_0 的西北角的 3×3 矩阵作为 U_0、V_0 同样适用，但此时 V_0 不是等距算子，而只是一个部分等距算子.

解 121. 已知：希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 和它上面的压缩算子 A，$A^n\to0$ (强). 求作：希耳伯特空间 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 和它上面的移位 U，它具有题述的酉等价性质. 我们的构造法部分地受到下面的观察的启发：如果 $\mathbf{H}$ 中的矢量 f 换成 Af，则序列

$$\langle f,\ Af,\ A^2f,\ \cdots\rangle$$

被向后推移一位，即被换成

$$\langle Af,\ A^2f,\ A^3f,\ \cdots\rangle.$$

这启示我们 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 该类似于直接和

$$\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\cdots.$$

但这样是行不通的. 没有理由断定序列 $\langle f,\ Af,\ A^2f,\ \cdots\rangle$ 一定属于该直接和(级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|A^nf\|^2$ 不一定收敛)，而且即使它是如此的，f 与 $\langle f,\ Af,\ A^2f,\ \cdots\rangle$ 间的对应也可能不是保范的(即使 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|A^nf\|^2$ 收敛，其和仅当 $Af=0$ 时才会等于 $\|f\|^2$).

消除这些困难的诀窍是通过一个算子 T 对序列 $\langle f,\ Af,\ A^2f,\ \cdots\rangle$ 的各项进行变换以使所得的范数平方的级数由于逐项递消而容易地收敛于 $\|f\|^2$. 就是说：把 $\langle f,\ Af,\ A^2f,\ \cdots\rangle$ 换成 $\langle Tf,\ TAf,\ TA^2f,\ \cdots\rangle$，使得

$$\|Tf\|^2=\|f\|^2-\|Af\|^2,$$
$$\|TAf\|^2=\|Af\|^2-\|A^2f\|^2,$$
$$\|TA^2f\|^2=\|A^2f\|^2-\|A^3f\|^2,$$

如此类推. 如果要求对一切 f 成立，第一方程就蕴涵 $T^*T=1-A^*A$；反之，如果 $T^*T=1-A^*A$，则全部方程都能成立.

上面这几段只算是思路的启发. 证明本身应如下进行. 由于

A 是压缩算子，$1-A^*A$ 是正的，记 $T=\sqrt{1-A^*A}$，并令 $\mathbf{R}$ 表示 T 的值域的闭包．令 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 表示直接和 $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}\cdots$．如果 $f\in\mathbf{H}$，则对一切 n 有 $TA^nf\in\mathbf{R}$，且

$$\sum_{n=0}^{k}\|TA^nf\|^2=\sum_{n=0}^{k}((1-A^*A)A^nf,A^nf)$$
$$=\sum_{n=0}^{k}(\|A^nf\|^2-\|A^{n+1}f\|^2)$$
$$=\|f\|^2-\|A^{k+1}f\|^2.$$

由于已假定 $\|A^{k+1}f\|\to 0$，得知如果 $f\in\mathbf{H}$，且映射 V 由

$$Vf=\langle Tf,TAf,TA^2f,\cdots\rangle$$

定义，则 V 是 $\mathbf{H}$ 到 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 中的一个等距嵌入．如果 U 是 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 上那个显然的移位 $(U\langle f_0,f_1,f_2,\cdots\rangle=\langle 0,f_0,f_1,\cdots\rangle)$，则明显地对一切 f 有 $VAf=U^*Vf$．由于 $\mathbf{H}$ 在 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 中的 V 象在 U^* 下不变，证完．

注意证明中所给出的移位的重数等于 $1-A^*A$ 的秩，而这里的"秩"应解释为值域的闭包的维数．

解 122．假设 A 是希耳伯特空间上使得 $r(=r(A))<1$ 的一个算子．由于 $r=\lim_n\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$，得知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|z^n$ 在中心为 0 而半径$\left(=\dfrac{1}{r}\right)$大于 1 的一个圆域上收敛．这蕴涵 $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|<\infty$，从而还有 $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|^2<\infty$．令 $\mathbf{H}_0$ 表示改变 $\mathbf{H}$ 的内积所得到的希耳伯特空间；新内积由

$$(f,g)_0=\sum_{n=0}^{\infty}(A^nf,A^ng)$$

给出．由于 $|(A^nf,A^ng)|\leqslant\|A^nf\|\cdot\|A^ng\|\leqslant\|A^n\|^2\cdot\|f\|\cdot\|g\|$，不存在关于收敛性的困难．如果 $\|f\|_0^2=(f,f)_0$，则

$$\|f\|^2\leqslant\|f\|_0^2\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|^2\right)\cdot\|f\|^2,$$

而这蕴涵自 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{H}_0$ 的恒等映射 I 是一个可逆有界线性变换（这，附带地，又保证了 $\mathbf{H}_0$ 的完备性）．如果 $A_0=IAI^{-1}$，则 A_0 是

$\mathbf{H}_0$ 上相似于A 的一个算子．如果$f\neq 0$,则

$$\frac{\|A_0 f\|_0^2}{\|f\|_0^2}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A^n f\|^2}{\|f\|^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A^n f\|^2}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\|A^n f\|/\|f\|)^2}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\|A^n f\|/\|f\|)^2}$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A^n\|^2}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A^n\|^2}<1,$$

因此 A_0 是一个真压缩算子．这蕴涵 A_0 的幂不但强趋于 0, 而且依范数趋于 0.

系 1 从问题 121 立即得到,而系 2 为 (上面所给出的) $\|A_0\|<1$ 的证明所蕴涵．对于系 3: 如果 A 是拟幂零的,则对每一个正数 ε 有

$$r\left(\frac{1}{\varepsilon}A\right)<1;$$

如果$(1/\varepsilon)A$ 相似于压缩算子 C,则 A 相似于 εC.

系 4 要求稍多一些的论证．很清楚, $r(A)=r(S^{-1}AS)\leqslant\|S^{-1}AS\|$．所以 $r(A)\leqslant\inf\limits_{S}\|S^{-1}AS\|$．为了证明反向不等式,令 t 表示开单位区间中的一数并记

$$B=\frac{t}{r(A)}A$$

(如果 $r(A)=0$, 可改用系 3 进行论证)．系 2 蕴涵对于某一 S 有 $\|S^{-1}BS\|<1$, 因此 $t\cdot\|S^{-1}AS\|<r(A)$. 由此推断 $t\cdot\inf\limits_{S}\|S^{-1}AS\|\leqslant r(A)$．然后令 t 趋于 1.

解 123. U 在 $\mathbf{M}$ 上的限制是一个等距算子．如果 $\mathbf{N}=\mathbf{M}\cap(U\mathbf{M})^{\perp}$, 则 $\mathbf{N}$ 是这个限制的值域的正交补．对这个限制应用解 118 中得到的结果便得

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{M}=\mathbf{M}\cap\bigcap_{n=0}^{\infty}(U^n\mathbf{N})^{\perp}.$$

由于 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{H}^2=\{0\}$, 得知

$$\mathbf{M}^{\perp} \vee \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathbf{N} = \mathbf{H}^2.$$

由于，另一方面，$U^n\mathbf{N} \subset U^n\mathbf{M} \subset \mathbf{M}$，得知

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathbf{N} \subset \mathbf{M}.$$

$\mathbf{M}^{\perp}$ 和 $\mathbf{M}$ 的一个真子空间决不能张成全空间．结论：

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathbf{N} = \mathbf{M}.$$

剩下的是要证明 $\dim \mathbf{N} = 1$．为此目的宜于把单侧移位 U 看做较大的空间 $\mathbf{L}^2$ 上的双侧移位 W 在 $\mathbf{H}^2$ 上的限制．如果 f 和 g 是 $\mathbf{N}$ 中互相正交的单位矢量，则形如 $W^n f$ 或 $W^m g$ ($n,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$) 的矢量全体的集是 $\mathbf{L}^2$ 中的一个就范正交集（这个断语的成立依靠酉算子的游动子空间的良好性质）．由此得知

$$\begin{aligned}2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 &= \sum_n |(f,\ e_n)|^2 + \sum_m |(g,\ e_m)|^2 \\ &= \sum_n |(f,\ W^n e_0)|^2 + \sum_m |(g,\ W^m e_0)|^2 \\ &= \sum_n |(W^{*n} f,\ e_0)|^2 + \sum_m |(W^{*m} g,\ e_0)|^2 \leqslant \|e_0\|^2 = 1\end{aligned}$$

（不等式即 Bessel 不等式）．这个悖谬结论指明 f 和 g 不能并存．$\mathbf{N}$ 的维数不能大到 2；由于它也不能是 0，证完．

证明的最后部分属于 I. Halperin；参看 Nagy-Foias，[1962, p. 108]．它是几何的，Halmas[1961] 中的原证则是解析的．也可参看 Robertson[1965]．

解 124．由于 $\mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda)$ 由 $f_\lambda,\ \cdots,\ U^{k-1}f_\lambda$ 张成，明显地有 $\dim \mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda) \leqslant k$．为了证明等式，首先注意到 $\mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda)$ 在 U^* 下不变（的确，$U^* f_\lambda = \lambda f_\lambda$ 且如 $j \geqslant 1$，$U^* U^j f_\lambda = U^* U U^{j-1} f_\lambda = U^{j-1} f_\lambda$．注意这证明了 $\mathbf{M}_k(\lambda)$ 在 U 下的不变性）．如果 $\dim \mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda) < k$，则对适当选择的数量 α_i，有 $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i U^i f_\lambda = 0$，或换句话说，存在次数小于 k 的一个多项式 p 使得 $p(U) f_\lambda = 0$．这蕴涵对于一切 n，$U^n f_\lambda$ 是 $f_\lambda,\ \cdots,\ U^{k-1} f_\lambda$ 的线性组合，从而 $\mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda)$ 也在 U 下不变．这是不可能的，所以 $\dim \mathbf{M}_k^{\perp}(\lambda) = k$．

由于$f_\lambda-\lambda Uf_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n e_n-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}e_n=e_0$，得知$k>1$后便有$e_0\in\mathbf{M}_k^\perp(\lambda)$．这蕴涵$U^jf_\lambda-\lambda U^{j+1}f_\lambda=U^je_0=e_j\in\mathbf{M}_k^\perp(\lambda)$当$k>j+1$后成立，因此$\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}_k^\perp(\lambda)$包含所有的$e_j$．

解 125．如果$\mathbf{M}=\varphi\cdot\mathbf{H}^2$，则$U\mathbf{M}=e_1\cdot\mathbf{M}=e_1\cdot\varphi\cdot\mathbf{H}^2=\varphi\cdot e_1\cdot\mathbf{H}^2\subset\varphi\cdot\mathbf{H}^2=\mathbf{M}$；这证明了"当"．同一蕴涵关系还有一个证法，它使用了游动子空间的理论．如果$\mathbf{N}$是φ张成的(一维)子空间，则$\mathbf{N}$是游动的；理由是$(U^n\varphi,U^m\varphi)=\int e_ne_m^*d\mu=\delta_{nm}$．为了证明"只当"，可假设$\mathbf{M}$在$U$下不变，并用问题123将$\mathbf{M}$表示成$\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\mathbf{N}$的形式，这里的$\mathbf{N}$是关于$U$的一个游动子空间．取一个$\mathbf{N}$中单位矢$\varphi$．由于根据假定，当$n>0$时$(U^n\varphi,\varphi)=0$，或当$n>0$时，$\int e_n|\varphi|^2d\mu=0$，(取共轭复数)得知当$n<0$时也有$\int e_n|\varphi|^2d\mu=0$，从而$|\varphi|^2$是$\mathbf{L}^1$中这样的一个函数，它的具非零下标的富里叶系数全等于0．结论：$|\varphi|$几乎处处是一常数，而且由于$\int|\varphi|^2d\mu=1$，φ的常数模必须是1(注意上面的论证包含了下命题的一个与解123所用的不同的证明，该命题即：U的每一个非零游动子空间都是一维的)．由于φ本身就张成$\mathbf{N}$，函数$\varphi\cdot e_n(n=0,1,2,\cdots)$张成了$\mathbf{M}$．等价地说，形如$\varphi\cdot p$的函数全体的集，这里$p$表示多项式，张成了$\mathbf{M}$．由于乘以$\varphi$的乘法(限制到$\mathbf{H}^2$上)是一个等距算子，它的值域是闭的；由于$\mathbf{M}$是它的一个稠密子集在该等距算子下的象的张成空间，得知$\mathbf{M}$事实上等于该等距算子的值域，从而$\mathbf{M}=\varphi\cdot\mathbf{H}^2$．

为了证明系1的第一陈述，请注意如果$\varphi\cdot\mathbf{H}^2\subset\psi\cdot\mathbf{H}^2$，则对于$\mathbf{H}^2$中某一个$f$，$\varphi=\varphi\cdot e_0=\psi\cdot f$；由于$f=\varphi\cdot\psi^*$，可知$|f|=1$，因此$f$是一个内函数．为证明第二陈述，只须证明如果$\theta$和$\theta^*$两者都是内函数，则$\theta$是一个常数．要证明这一点，请注意$\operatorname{Re}\theta$和$\operatorname{Im}\theta$都是$\mathbf{H}^2$中的实函数，所以(问题26)$\operatorname{Re}\theta$和$\operatorname{Im}\theta$都是常数．至于

系 2; 注意如果 $\mathbf{M}=\varphi\cdot\mathbf{H}^2$ 且 $\mathbf{N}=\psi\cdot\mathbf{H}^2$, 则 $\varphi\cdot\psi\in\mathbf{M}\cap\mathbf{N}$.

解 126. 首先考虑简单单侧移位 U. 令 $\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$ 表示一个使得

$$\lim_k \frac{1}{|\xi_k|^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{n+k}|^2=0$$

的复数序列(具体例子: $\xi_n=1/n!$). 断语: $f=\langle\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\rangle$ 是 U^* 的一个循环矢量. 为了证明, 请首先注意到 $U^{*k}f=\langle\xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \cdots\rangle$, 从而有

$$\left\|\frac{1}{\xi_k}U^{*k}f-e_0\right\|=\left\|\langle 1, \frac{\xi_{k+1}}{\xi_k}, \frac{\xi_{k+2}}{\xi_k}, \cdots\rangle-\langle 1, 0, 0, \cdots\rangle\right\|^2$$

$$=\left\|\langle 0, \frac{\xi_{k+1}}{\xi_k}, \frac{\xi_{k+2}}{\xi_k}, \cdots\rangle\right\|^2=\frac{1}{|\xi_k|^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{n+k}|^2\to 0.$$

推论: e_0 属于 $f, U^*f, U^{*2}f, \cdots$的张成空间. 这蕴涵

$$U^{*k-1}f-\xi_{k-1}e_0=\langle 0, \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \cdots\rangle$$

属于这个张成空间 $(k=1, 2, 3, \cdots)$. 由于

$$\left\|\frac{1}{\xi_k}(U^{*k-1}f-\xi_{k-1}e_0)-e_1\right\|^2=\frac{1}{|\xi_k|^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{n+k}|^2\to 0,$$

得知 e_1 属于 $f, U^*f, U^{*2}f, \cdots$ 的张成空间. 用一种明显方式, 归纳地重复这个用过了两次的论证, 可以证明对一切 $n(=0, 1, 2, \cdots)$, e_n 属于 $f, U^*f, U^{*2}f, \cdots$ 的张成空间, 从而 f 是循环矢量.

这一步解决了, 高重数的情况就变成不足道的. 对于重数 2 的情形可考虑同一序列 $\{\xi_n\}$ 并构成矢量

$$\langle\langle\xi_0, \xi_2, \xi_4, \cdots\rangle, \langle\xi_1, \xi_3, \xi_5, \cdots\rangle\rangle.$$

对于有限高重数, 甚至对于重数 $\aleph_0$, 可以仿此构成子序列. 例如, 重数 $\aleph_0$ 的移位的循环矢量是这样的矢量, 其第 i 个分量是下面的阵的第 i 行:

$$\begin{matrix}
\xi_0 & \xi_1 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_6 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & \xi_7 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & \xi_8 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_9
\end{matrix}$$

(规则: 逐步增长对角线. 每列仅含一个非零元素; 每行是 $\{\xi_n\}$

的一个无穷子序列). 关键点在于, 具有 $\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2$ 所具的性质(各项后的余和与该项的比趋于 0) 的级数的每一子级数也具有同样的性质.

解 127. 已知 $\mathbf{H}^2$ 中的 f, 令 $\mathbf{M}$ 表示 $\mathbf{H}^2$ 的含有 f 且在 U 下不变的最小的子空间. 据问题 125, 非 $f=0$ 即 $\mathbf{M}$ 含一个函数 φ 使得几乎处处有 $|\varphi|=1$. 由于对每一个多项式 p 有 $p(U)f\in\mathbf{M}$, 又由于形如 $p(U)f$ 的矢量全体的集的闭包是 $\mathbf{H}^2$ 的一个含有 f 且在 U 下不变的子空间, 可知 φ 是形如 $p(U)f$ 的矢量的一个序列在 $\mathbf{H}^2$ 中的极限. 由于每一个具此形式的矢量最少在 f 为零的点取值 0, 得知在 f 为零的点 φ 必取值 0.

为了证明系, 只须注意如果 f 非几乎处处为零, 则据 F. 和 M. Riesz 定理, 它必几乎处处不为零, 所以 g 必须几乎处处为零.

解 128. 存在一个 $\mathbf{L}^2$ 的非零元素 f, 它在一个正测度集上为零, 并使得当 $n\neq 0$ 时恒有 $(f, e_n)(f, e_{-n})=0$.

证. 令 g 表示 $\mathbf{L}^2$ 的任意一个在正测度集上为零的非零元素, 并记 $f(z)=zg(z^3)$. f 显然也是 $\mathbf{L}^2$ 的一个在正测度集上为零的非零元素. 如果 $g=\sum_n \beta_n e_n$, 则 $f=\sum_n \beta_n e_{3n+1}$(这需要核证), 因此除非 $n\equiv 1 \pmod 3$ 必有 $(f, e_n)=0$, 如果 $n\equiv 1 \pmod 3$, 则 $-n\equiv 2 \pmod 3$, 所以对一切 n 有 $(f, e_n)(f, e_{-n})=0$.

解 129. 首先假设 $\{\alpha_n\}$ 是周期序列, 具有周期 $p(=1$, 或 2, 或 3, $\cdots)$, 并令 $\mathbf{M}_j(j=0,\cdots,p-1)$ 是所有使 $n\equiv j \pmod p$ 的诸基矢量 e_n 张成的空间. 每一矢量各有唯一的形如 $f_0+\cdots+f_{p-1}$ 的表示式, 其中 f_j 属于 $\mathbf{M}_j$. 考虑双侧移位的函数表示并利用它建立下述定义. 对于单位圆的每一可测子集 E, 令 $\mathbf{M}(=\mathbf{M}_E)$ 表示如下的诸 f 全体的集, 对这些 f 说, 每当 $j=0, \cdots, p-1$ 且 $z\notin E$ 时, 恒有 $f_j(z)=0$. 如果 $f=\sum_{j=0}^{p-1} f_j$(f_j 在 $\mathbf{M}_j$ 中), 则

$$Af=\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_j W f_j$$

且
$$A^*f=\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_{j-1}W^*f_j;$$

这证明了 $\mathbf{M}$ 约化 A(注意 $W\mathbf{M}_j=\mathbf{M}_{j+1}$ 且 $W^*\mathbf{M}_j=\mathbf{M}_{j-1}$，这里的加、减法应理解为模 p 的).

为了证明这个构造法可以得到非平凡的约化子空间，令 E_0 表示一个可测集，具有严格介于 0 与 $1/p$ 之间的测度，并令 E 表示它在映射 $z\rightarrow z^p$ 下的原象．集 E 是一个可测集，具有严格介于 0 与 1 之间的测度．如果 g 是一个在 E_0 的余集上取值 0 的函数[注]，且 $f_0(z)=g(z^p)$，则 f_0 在 E 的余集上为零．如果还有 $f_j(z)=z^jf_0(z)$，$j=0, \cdots, p-1$，则对各个 f_j 说，这也是真的．很清楚，$f_j\in\mathbf{M}_j$ 且 $f_0+\cdots+f_{p-1}$ 是表示成标准形式的 $\mathbf{M}$ 中非零矢量的一例．这就完成了条件的充分性的证明．

必要性部分是令人惊讶的．为了证明它，首先假设 B 是具有矩阵 $\{\beta_{ij}\}$ 且与 A 可交换的一个算子．注意

$$\beta_{i+1,j+1}=(Be_{j+1},e_{i+1})=\left(B\frac{1}{\alpha_j}Ae_j,e_{i+1}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha_j}(Be_j,\ A^*e_{i+1})=\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\beta_{ij}.$$

推论 1　$\{\beta_{ij}\}$的主对角线是常数序列(置 $i=j$).

推论 2　如果对于某一对 i, j，$\beta_{ij}=0$，则对一切 k 有 $\beta_{i+k,j+k}=0$.

如果 B 又是自伴的，则它也与 A^* 可交换，从而与 A^*A 可交换．由于 $A^*Ae_n=\alpha_n^2e_n$，得知

$$\beta_{ij}=(Be_j,\ e_i)=\left(B\frac{1}{\alpha_j^2}A^*Ae_j,\ e_i\right)=\frac{1}{\alpha_j^2}(Be_j,\ A^*Ae_i)$$
$$=\frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2}\beta_{ij}.$$

推论 3　如果 $\alpha_i\neq\alpha_j$，则 $\beta_{ij}=0$.

现在假定序列 $\{\alpha_n\}$ 不是周期的；只须证明每一个与 A 可交换的自伴算子 B 是一个倍乘算子．这个假定蕴涵如果 m 和 n 是不

[注]　此处应假设 g 在 E_0 上不几乎处处为零．——译者注

相等的正整数，则存在整数 i 和 j 使得 $\alpha_i \neq \alpha_j$ 且 $i-j=m-n$. 由此得知

$$0=\beta_{ij}\ (\text{据推论 }3)=\beta_{i-j+n,\, j-j+n}\ (\text{据推论 }2),$$

即每当 $m\neq n$ 有 $\beta_{mn}=0$. 这说明矩阵 B 是对角的；据推论 1 即知 B 是一个倍乘算子.

第十五章　紧　算　子

解 130. 如果 A 是 $(s\to s)$ 连续的，又 $\{f_j\}$ 是一个 w-收敛于 f 的网，则对一切 g 有 $(Af_j, g)=(f_j, A^*g)\to(f, A^*g)=(Af, g)$，因此 $Af_j\to Af(w)$，这证明了 A 是 $(w\to w)$ 连续的. 注意 $(s\to s)$ 连续性的假定在伴随算子 A^* 的存在性中，隐蔽地，但却是关系重大地，用上了.

如果 A 是 $(w\to w)$ 连续的，又 $\{f_j\}$ 是 s-收敛于 f 的网，则必更加有 $f_j\to f(w)$，而假设条件蕴涵 $Af_j\to Af(w)$. 这证明了 A 是 $(s\to w)$ 连续的.

为了证明如果 A 是 $(s\to w)$ 连续的，则 A 是有界的，假定其反面成立. 这蕴涵存在一个单位矢量的序列 $\{f_n\}$ 使得 $\|Af_n\|\geqslant n^2$. 由于

$$\frac{1}{n}f_n\to 0(s),$$

原假定蕴涵

$$\frac{1}{n}Af_n\to 0(w),$$

从而

$$\left\{\frac{1}{n}Af_n\right\}$$

是一个有界序列；这与

$$\left\|\frac{1}{n}Af_n\right\|\geqslant n$$

矛盾.

最后假设 A 是 $(w\to s)$ 连续的. 由此，知开单位球在 A 下的

原象是一个弱开集，从而它包含0的一个基弱邻域．换句话说，存在矢量$f_1, \cdots, f_k$和一个正数ε使得如果$|(f, f_i)|<\varepsilon$, $i=1, \cdots, k$, 则$\|Af\|<1$．如果f属于$\{f_1, \cdots, f_k\}$的张成空间的正交补，则一定有$|(f, f_i)|<\varepsilon$, $i=1, \cdots, k$, 因此$\|Af\|<1$．由于这个结论也适用于f的一切数量倍，得知Af必须是0．这证明了A使一个具有有限余维的子空间映射成0，而这等于说A有有限的秩(如果存在一个无穷维子空间，在它的上面A是一对一的，则A的值域是无穷维的；为了证明其逆命题，注意A的值域等于其核的正交补在A下的象)．

为了证明系，可利用算子(即$(s\to s)$连续的线性变换)是$(w\to w)$连续的结论．由于闭单位球是弱紧的，得知它的象也是弱紧的，因而是弱闭的，因而是强闭的．

解 131．$\mathbf{C}$是一个理想的证明是初等的．利用极分解，$\mathbf{C}$是自共轭的证明也是初等的．的确，如果$A\in\mathbf{C}$，且$A=UP$，则$P=U^*A$ (参看问题105，系1)，因此$P\in\mathbf{C}$；由于$A^*=PU^*$，得知$A^*\in\mathbf{C}$．

现在假设$A_n\in\mathbf{C}$且$\|A_n-A\|\to 0$；求证每当$\{f_j\}$是弱收敛于f的有界网时必有$Af_j\to Af$．注意

$$\|Af_j-Af\|\leqslant\|Af_j-A_nf_j\|+\|A_nf_j-A_nf\|+\|A_nf-Af\|.$$

右边的第一项为$\|A-A_n\|\cdot\|f_j\|$所限，由于$\{\|f_j\|\}$有界，得知第一项关于j一致地对于一切大的n变成很小．末项为$\|A_n-A\|\cdot\|f\|$所限，从而它对于大的n也是很小的．固定某一大的n；A_n的紧性蕴涵中间项对于“大的”j变成很小．这样就完成了$\mathbf{C}$是闭的证明．

解 132．令A表示具有对角线$\{\alpha_n\}$的算子，且对每一正整数n，考虑具有对角线$\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, 0, 0, 0, \cdots\}$的对角算子$A_n$．由于$A-A_n$是具有对角线$\{0, \cdots, 0, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots\}$的对角算子，因此$\|A-A_n\|=\sup\limits_k|\alpha_{n+k}|$，很明显地，$\alpha_n\to 0$的假定蕴涵$\|A-A_n\|\to 0$的结论．由于紧算子的(依范数的)极限是紧的，得知如果$\alpha_n\to$

0，则 A 是紧的。

为了证明逆命题，可以考虑使 A 成为对角的就范正交基$\{e_n\}$. 如果 A 是紧的，则 $Ae_n \to 0$（强）（因为 $e_n \to 0$（弱）；参看解 13）. 换句话说，如果 A 是紧的，则 $\|\alpha_n e_n\| \to 0$，这正是说 $\alpha_n \to 0$.

如果 $Se_n = e_{n+1}$，则 A 和 SA 中，每一算子各是另一算子的倍（请记起 $S^*S=1$），这蕴涵 A 和 SA 同时是紧的或同时不是紧的. 这个评注证明了系.

解 133. 应用一个充分有力的工具（谱定理）可使证明变成容易的. 先要看到无穷维希耳伯特空间上的紧算子不可能是可逆的（证明：单位球在可逆算子下的象是强紧的当且只当单位球本身是强紧的）. 由于紧算子在一个不变子空间上的限制是紧的，得知如果一个紧算子在不变子空间上的限制是可逆的，则该子空间是有限维的.

现在假设 A 是一个紧正规算子；根据谱定理，无损于普遍性，可以假定 A 是某测度空间上由有界可测函数 φ 诱导出的乘法算子. 对每一个正数 ε，令 M_ε 表示集$\{x: |\varphi(x)| > \varepsilon\}$，并令 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 表示由那些在 M_ε 以外取值 0 的函数组成的 $\mathbf{L}^2$ 的子空间. 很清楚，每一 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 约化 A，且 A 在 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 上的限制是下有界的，由此知 $\mathbf{M}_\varepsilon$ 是有限维的.

A 的谱是 φ 的本性值域. 前段的结果蕴涵对每一正整数 n，谱在圆域$\left\{\lambda: |\lambda| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$之外的部分所包含的只能是有限个有限重的特征值；由此即得求证的一切.

解 134. 假设恒等算子是一个积分算子，具有核 K. 意即，如果 $f \in \mathbf{L}^2$（在一个具有 σ-有限测度 μ 的测度空间上），则对几乎每一个 x,

$$\int K(x, y) f(y) d\mu(y) = f(x),$$

且由此得知如果 f 和 g 都在 $\mathbf{L}^2$ 中，则

$$(f, g) = \iint K(x, y) f(y) g(x)^* d\mu(x) d\mu(y).$$

如果特别地，f 和 g 是可测集的（譬如说 F 和 G 的）特征函数，则上方程变成

$$\mu(F\cap G)=\iint\limits_{F\times G}K(x,y)d\mu(x)d\mu(y).$$

后面这个方程是两个集函数间的方程. 右边是在 $F\times G$ 上计算的 K 的不定积分. 为了得到左边的一个有意义的描述，令 T 表示从 X 到 $X\times X$ 的对角映射（$Tx=\langle x,x\rangle$），并令 ν 表示 $X\times X$ 的可测子集 E 的由

$$\nu(E)=\mu(T^{-1}E)$$

定义的测度. 如果 F 和 G 是 X 的可测子集，则 $T^{-1}(F\times G)=F\cap G$，而因此

$$\nu(F\times G)=\mu(F\cap G).$$

结论：K 的不定积分与 ν 在一切"矩形"上相等，从而在一切可测集上相等，所以特别有，K 的不定积分集中于对角线上，最后这个断语的意义是说，如果 D 是 $X\times X$ 的对角线，$D=\{\langle x,y\rangle:x=y\}$，则 K 的不定积分在 D 的余集的每一可测子集上为零（因为 ν 是如此的）. 由此得知在 D 的余集中的几乎每一点有 $K(x,y)=0$.

上面的推理对于一般的（σ-有限）测度是合理的；它没有利用勒贝格测度的特殊性质. 作为一例，它也适用于一个可数集上的计数测度，此时它蕴涵恒等算子的矩阵是一个对角矩阵——一个平凡结论. 由于这推理总适用于勒贝格测度，而在平面中，对角线的勒贝格测度是 0，得知如果 μ 是勒贝格测度，则几乎处处有 $K=0$. 考虑到用 K 表示 (f,g) 的式子，这是悖谬的，证完.

解 135. 请记起简单函数是具有有限值域的可测函数；等价地说，简单函数是可测集的特征函数的有限线性组合. 简单函数属于 $\mathbf{L}^2$ 当且仅当原点的余集的原象必具有有限测度；与此等价的一个条件是，它是具有有限测度的可测集的特征函数的有限线性组合. $\mathbf{L}^2(\mu)$ 中的简单函数在 $\mathbf{L}^2(\mu)$ 中稠密. 由此得知，具有有限测度的可测矩形的特征函数的有限线性组合在 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 中稠密. 考虑到这些评注，就知道我们只须证明，如果 A 是具有核

K 的积分算子，此处

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y)$$

其中每一 g_i 和每一 h_i 是具有有限测度的可测集的特征函数的数量倍，则 A 是紧算子，其实我们还可以同样容易地证明更强的结论：只要每一 g_i 和 h_i 属于 $\mathbf{L}^2(\mu)$，则算子 A 有有限的秩，事实上，A 的值域包含于这些 g 的张成空间中．证明是简捷的：如果 $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$，则

$$(Af)(x)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\int h_i(y) f(y) d\mu(y).$$

解 136. 如果 A 是一个 Hilbert-Schmidt 算子，则 A^*A 的特征值的和是有限的．

证. 我们说 A 是一个 Hilbert-Schmidt 算子，其意义当然是说 A 是一个(譬如说是) $\mathbf{L}^2(\mu)$ 上的由 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 中的核 K 诱导的积分算子．由于 A^*A 是一个紧正规算子，存在一个由 A^*A 的特征矢组成的就范正交基 $\{f_j\}$ (问题 133)；记 $A^*Af_j=\lambda_j f_j$．通过一个有用的方法可以把前面这两个陈述汇总一起，这就是引入一个适当的 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 的基，然后，据 Parseval 等式，求 K 的 $\mathbf{L}^2(\mu\times\mu)$ 范数 (它当然是有限的) 依这个基的表示式．眼前容易看到的基只有一个，它由函数 g_{ij} 组成，而 $g_{ij}(x, y)=f_i(x)f_j(y)$．但另一个稍不明显的基在代数上倒是略较便利的；它由函数 g_{ij} 组成，而 g_{ij} 由 $g_{ij}(x, y)=f_i(x)f_j(y)^*$ 定义．

以下就只剩简单计算了：

$$\|K\|^2=\sum_i\sum_j|(K, g_{ij})|^2 \text{(据 Parseval 等式)}$$

$$=\sum_i\sum_j\left|\iint K(x, y) f_i(x)^* f_j(y) d\mu(x) d\mu(y)\right|^2$$

$$=\sum_j\sum_i\left|\int\left(\int K(x, y) f_j(y) d\mu(y)\right) f_i(x)^* d\mu(x)\right|^2$$

$$=\sum_j\sum_i\left|\int (Af_j)(x) f_i(x)^* d\mu(x)\right|^2$$

$$=\sum_j\sum_i|(Af_j, f_i)|^2=\sum_j\|Af_j\|^2(\text{据 Parseval 等式})$$

$$=\sum_j(Af_j, Af_j)=\sum_j(A^*Af_j, f_j)=\sum_j\lambda_j.$$

证明已经结束. 不满足 Hilbert-Schmidt 条件的具体的紧算子的构造现在就容易了. 考虑一个无穷矩阵(也就是 l^2 上的一个"核"). 依定义, 如果其元素的模的平方和是有限的, 该矩阵确定一个 Hilbert-Schmidt 算子. 特别当矩阵是对角矩阵时, 这是真的. 刚才证明了的定理蕴涵, 这时上述有限性条件不但是该矩阵确定了一个 Hilbert-Schmidt 算子的充分条件, 也是该结论的必要条件. 于是, 就对角算子的情形说, 紧和 Hilbert-Schmidt 间的差异就是趋于 0 的序列和平方可和序列间的差异.

解 137. 如果 A 是紧算子而 UP 是其极分解, 则 $P(=U^*A)$ 是紧算子. 据问题 133, P 是 0 和一个可分空间上的对角算子的直接和, 且该对角算子的对角项序列趋于 0. 这蕴涵 P 是有限秩算子序列 $\{P_n\}$(依范数) 的极限, 从而 $A=U\cdot\lim_n P_n=\lim_n UP_n$. 由于对每个 n, UP_n 有有限的秩, 证完.

解 138. 假设 $\mathbf{I}$ 是一个算子的非零闭理想. 第一步要证明 $\mathbf{I}$ 含有每一个一秩算子. 为了证明这一点, 试观察如果 u 和 v 是非零矢量, 则由 $Af=(f, u)v$ 定义的算子具有秩 1, 而每一个一秩算子都具有这种形式. 为了证明每一个这样的算子属于 $\mathbf{I}$, 可在 $\mathbf{I}$ 中取一个非零算子 A_0, 并令 u_0 和 v_0 表示非零矢量使得 $A_0u_0=v_0$. 令 B 表示由 $Bf=(f, u)u_0$ 定义的算子, 令 C 表示使得 $Cv_0=v$ 的任意一个算子. 由此得知

$$CA_0Bf=CA_0(f, u)u_0=(f, u)Cv_0=(f, u)v=Af,$$

即 $CA_0B=A$. 由于 $\mathbf{I}$ 是一个理想, 得知 $A\in\mathbf{I}$, 如所期望.

由于 $\mathbf{I}$ 含有一切一秩算子, 它也含有一切有限秩算子, 又由于 $\mathbf{I}$ 是闭的, 得知 $\mathbf{I}$ 含有每一个紧算子. (注意到此为止还不需要可分性.)

最后的一步是要证明如果 $\mathbf{I}$ 含有一个非紧算子 A, 则 $\mathbf{I}$ 含有

每一个算子. 如果 UP 是 A 的极分解, 则 $P\in\mathbf{I}$(因为 $P=U^*A$), 且 P 不是紧算子(因为 $A=UP$). 由于 P 是自伴的,必存在一个无穷维子空间 $\mathbf{M}$,它在 P 下不变, 在它上面 P 是下有界的, 譬如说,以 ε 为下界(设若不然,则 P 将是紧的). 令 V 表示一个从 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{M}$ 上的等距算子 ($\mathbf{H}$ 的可分性就从这里进入问题). 由于 $P\mathbf{M}=\mathbf{M}$, 得知 $V^*PV\mathbf{H}=V^*P\mathbf{M}=V^*\mathbf{M}=\mathbf{H}$. 由于还有对一切 f, $Vf\in\mathbf{M}$,得知

$$\|V^*PVf\|=\|PVf\|\geqslant\varepsilon\|Vf\|=\varepsilon\|f\|.$$

这两个断语蕴涵 V^*PV 是可逆的. 由于 $V^*PV\in\mathbf{I}$, 含有一个可逆元的理想含有一切元; 证完.

解 139. 如果 A 是正规的又对某正数 n, A^n 是紧的,则 A 是紧的.

证. 把 A 表示成一个适当的测度空间上的有界可测函数 φ 诱导出的乘法算子, 注意这样也自动地把 A^n 表示成 φ^n 诱导出的乘法算子. 由于, 据问题 133, A^n 是 0 和一个具有收敛于 0 的对角项的对角算子的直接和,得知 φ^n 的本性值域是一个只能以 0 为聚点的可数集. 这蕴涵 A 是 0 和一个具有收敛于 0 的对角项的对角算子的直接和,从而 A 是紧的.

解 140. 已给希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的紧算子 C,记 $A=1-C$. 待证的是, 如果 $\ker A=\{0\}$, 则 A 是可逆的. 通过下面两个引理可以方便地得到证明: (1) 如果 $\operatorname{ran} A=\mathbf{H}$, 则 $\ker A=\{0\}$. (2) A 在 $(\ker A)^\perp$ 上是下有界的.

(1) 置 $\mathbf{K}_n=\ker A^n$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 如果 $\mathbf{K}_1\neq\{0\}$,令 f_1 表示 $\mathbf{K}_1$ 中的一个非零矢量, 然后归纳地求得 f_{n+1} 使得 $Af_{n+1}=f_n$. 由此知对一切 n 有 $f_n\in\mathbf{K}_n$, 而且事实上 A的在 f_n 取值 0 的最小幂是第 n 次幂. 这蕴涵序列 $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \cdots\}$ 是严格上升的,从而存在一个就范正交序列 $\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ 使得对一切 n 有 $e_n\in\mathbf{K}_n$. 由于 $Ae_{n+1}\in\mathbf{K}_n$, 因此 $Ae_{n+1}\perp e_{n+1}$, 由此得知

$$\|Ce_{n+1}\|^2=\|e_{n+1}-Ae_{n+1}\|^2=\|e_{n+1}\|^2+\|Ae_{n+1}\|^2\geqslant 1.$$

由于 $e_n\to 0$ (弱), 这与假设的 C 的紧性矛盾. 结论: $\mathbf{K}_1=\{0\}$.

(2) 如果 A 在$(\ker A)^\perp$上不是下有界，则在 $(\ker A)^\perp$ 中存在单位矢 f_n 使得 $Af_n \to 0$. 考虑到 C 的紧性，无损于一般性可以假定序列 $\{Cf_n\}$(强)收敛于(譬如说) f. 由于 $f_n = Af_n + Cf_n \to f$，得知 $f \in (\ker A)^\perp$ 且 $\|f\| = 1$; 可是 $Af_n \to Af$，因此 $Af = 0$，由此知 $f \in \ker A$，从而 $f = 0$. 这个矛盾完成了 A 在$(\ker A)^\perp$ 上下有界的证明.

(1)和(2)的结果，如同对于 C 和 A 一样，也有效地适用于 C^* 和 A^*. 由于 $\operatorname{ran} A = A\mathbf{H} = A((\ker A)^\perp)$，从(2)得知 $\operatorname{ran} A$ 恒是闭的; 从而根据刚才的评论，$\operatorname{ran} A^*$ 也恒是闭的. 现在假设 $\ker A = \{0\}$; 当然可推知 $\operatorname{ran} A^*$ 稠于 $\mathbf{H}$. 由于 $\operatorname{ran} A^*$ 是闭的，这蕴涵 $\operatorname{ran} A^* = \mathbf{H}$，从而可以应用(1)(于 A^*). 结论: $\ker A^* = \{0\}$，所以$(\ker A^*)^\perp = \mathbf{H}$. 应用(2)(于 A^*)可推断 A^* 下有界. 与已建立的 $\operatorname{ran} A^*$ 的稠密性一起，这蕴涵 A^* 可逆，从而 A 可逆; 证完.

解 141. 假设 A 是紧的且 $\mathbf{M}$ 是一个使得 $\mathbf{M} \subset \operatorname{ran} A$ 的子空间. $\mathbf{M}$ 在 A 下的原象是一个子空间，譬如说是 $\mathbf{N}$，而交集 $\mathbf{N} \cap (\ker A)^\perp$ 也是一个子空间. A 在这个交集上的限制是从这个交集到 $\mathbf{M}$ 上的一对一有界线性变换，所以(问题 41)它是可逆的. $\mathbf{N}$ 的闭单位球(即闭单位球与 $\mathbf{N}$ 的交)的象是 $\mathbf{M}$ 的一个强紧子集，而据可逆性，它包含 $\mathbf{M}$ 的一个闭球(即它包含一个闭球与 $\mathbf{M}$ 的交). 这蕴涵 $\mathbf{M}$ 是有限维的; 证完.

解 142. (1) 蕴涵 (2). A 恒把 $(\ker A)^\perp$ 一对一地映射到 $\operatorname{ran} A$ 上，从而其逆映射把 $\operatorname{ran} A$ 一对一地映射到 $(\ker A)^\perp$ 上. 在现在的假设条件下，$\operatorname{ran} A$ 是闭的，所以据闭图象定理，该逆映射是有界的. 令 B 表示在 $\operatorname{ran} A$ 上等于该逆映射而在 $(\operatorname{ran} A)^\perp$ 上等于 0 的那个算子. 令 P 表示到 $\ker A$ 上的投影，而 Q 表示到 $(\operatorname{ran} A)^\perp$ 上的投影. 注意 P 和 Q 都是有限秩的. 由于在 $\ker A$ 和$(\ker A)^\perp$ 上都有 $BA = 1 - P$，又由于在 $\operatorname{ran} A$ 和$(\operatorname{ran} A)^\perp$ 上都有 $AB = 1 - Q$，得知 $1 - BA$ 和 $1 - AB$ 都有有限的秩.

(2)蕴涵 (3). 显而易见，因为有限秩算子必是紧的.

(3)蕴涵 (1). 如果 $C = 1 - AB$ 而 $D = 1 - BA$，其中 C 和 D

是紧的，则 $\ker B^*A^*$ 和 $\ker BA$ 都是有限维的．由此得知 $\ker A^*$ 和 $\ker A$ 都是有限维的，从而 $(\operatorname{ran} A)^\perp$ 和 $\ker A$ 都是有限维的．为了证明 $\operatorname{ran} A$ 是闭的，首先应注意 BA 在 $(\ker BA)^\perp$ 上是下有界的（参看解 140）．由于对一切 f 有 $\|BAf\| \leqslant \|B\| \cdot \|Af\|$，得知 A 在 $(\ker BA)^\perp$ 上是下有界的，从而 $(\ker BA)^\perp$ 在 A 下的象是闭的．由于 $\ker BA$ 是有限维的，$\ker BA$ 在 A 下的象是有限维的，从而是闭的，而 $\operatorname{ran} A$ 就是和 $A(\ker BA)+A(\ker BA)^\perp$（请回忆，当两个子空间中有一个是有限维时，这两个子空间的和恒是一个子空间；参看问题 8）．

解 143． 通过平移 λ 把题中断语约化成：如果 A 不可逆，但 $\ker A=\{0\}$，则 B 不可逆．其逆否命题：如果 B 可逆，则非 $\ker A \neq \{0\}$，必 A 可逆．为了证明它，可假定 B 是可逆的，并记

$$A=B+(A-B)=B(1+B^{-1}(A-B)).$$

随着 $A-B$，$B^{-1}(A-B)$ 也是紧的．由此得知除非 -1 是 $B^{-1}(A-B)$ 的特征值（此时 $\ker A \neq \{0\}$），必有 $1+B^{-1}(A-B)$ 可逆（此时 A 可逆）．

解 144． 双侧移位就是一例．假设 $\{e_n: n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 就是被移动的那个基（$We_n=e_{n+1}$），并令 C 表由 $Cf=(f, e_{-1})e_0$ 定义的算子，算子 C 有秩 1（它的值域就是 e_0 张成的空间），所以它是紧的．$W-C$ 是什么样的算子？由于 $\mathbf{H}^2$（$n \geqslant 0$ 的诸 e_n 的张成空间）在 W 下和 C 下都不变，它在 $W-C$ 下也是不变的．$\mathbf{H}^2$ 的正交补（$n<0$ 的诸 e_n 的张成空间）在 W 下和在 C 下都不是不变的（由于 $We_{-1}=Ce_{-1}=e_0$）；但它在 $W-C$ 下是不变的（理由：如果 $n<0$，则 $W-C$ 依 $n<-1$ 或 $n=-1$ 把 e_n 分别映射到 e_{n+1} 或 0）．结论：$\mathbf{H}^2$ 约化 $W-C$．这个结论使得我们易于描述 $W-C$：它在 $\mathbf{H}^2$ 上与单侧移位合同，而在 $\mathbf{H}^2$ 的正交补上则与单侧移位的伴随算子合同．换句话说，$W-C$ 就是直接和 $U^* \oplus U$，因而它的谱是 U^* 和 U 的谱的并．

借助矩阵可以把这一切看得更清楚．W 的（关于被移动的基）的矩阵在紧接主对角线下面的对角线上的元素都是 1 而其它

元素都是 0; 减去 C 的效应就是把其中一个 1, 即在 0 行、-1 列的那个 1 换成 0.

解 145. 摄动不能把单侧移位变成正规算子.

证. 我们使用的技巧是检查有关算子的谱并利用谱在摄动下的相对稳定性.

如果 $U=B-C$, B 正规而 C 紧, 则

$$U^*U=B^*B-D,$$

这里的
$$D=C^*B+B^*C-C^*C,$$

因此 D 是紧的. 由于 $U^*U=1$, 又 $\Lambda(1)=\{1\}$, 得知 (问题 143) $\Lambda(B^*B)$ 中的数, 除非是 1, 因而可能是例外, 其它各数事实上必是 B^*B 的特征值(另一证法, 利用 Fredholm 择一律). 由于可分希耳伯特空间上的自共轭算子只能有可数多个特征值, 得知 B^*B 的谱必是可数的. 由于 $\Lambda(U)$ 是闭单位圆域, 而 U 没有特征值, 从问题 143 得到的另一推论是 B 的谱与这个圆域只在 B 的特征值处可能有差异. 可分希耳伯特空间上的正规算子只能有可数多个特征值. 结论: 以可数集为模, $\Lambda(B)$ 是单位圆域, 因此(问题 97), 以可数集为模, $\Lambda(B^*B)$ 是区间 $[0,1]$. 这与 $\Lambda(B^*B)$ 的可数性矛盾.

解 146. 如果 H 和 K 是 Volterra 核, 则它们的"积"(矩阵的合成)也是这样, 理由:

$$(HK)(x,\ y)=\int_0^1 H(x,\ z)K(z,\ y)dz,$$

如果 $x<y$, 则对一切 z, 非 $x<z$(此时 $H(x,\ z)=0$), 必 $z<y$(此时 $K(z,\ y)=0$). 换句话说, 如果 $x<y$, 则 $HK(x,\ y)=0$; 如果 $x\geqslant y$, 则

$$(HK)(x,\ y)=\int_y^x H(x,\ z)K(z,\ y)dz,$$

因为除非 z 介于 y 与 x 之间, $H(x,\ z)$ 和 $K(z,\ y)$ 中必有一个为零. 由此得知如果 K 是一个有界 Volterra 核且 $|K(x,\ y)|\leqslant C$, 又 $x\geqslant y$, 则

$$|K^2(x,\ y)|=\left|\int_y^x K(x,\ z)K(z,\ y)\ dz\right|\leqslant C^2\cdot(x-y)$$

(在此处上下文中,类如K^2,K^3等等的记号表示"矩阵乘积"KK, KKK等等). 从此式接着又推知,如果$x\geqslant y$,则

$$|K^3(x, y)|=\left|\int_y^x K(x, z)K^2(z, y)dz\right|\leqslant C^3\int_y^x (z-y)dz$$
$$=\frac{C^3}{2}(x-y)^2.$$

这些是一个明显的归纳推理的最初两步;一般的结果是,如果$n\geqslant 1$且$x\geqslant y$,则

$$|K^n(x, y)|\leqslant\frac{C^n}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}.$$

这蕴涵更有
$$|K^n(x, y)|\leqslant\frac{C^n}{(n-1)!},$$

从而如果A是(K)所诱导的积分算子,则

$$\|A^n\|\leqslant\|K^n\|\leqslant\frac{C^n}{(n-1)!}.$$

由于
$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时 } \left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^{\frac{1}{n}}\to 0$$

(请回忆指数级数的收敛半径是∞),这就完全成了A是拟幂零的证明.

解 147. *每一个 Volterra 算子是拟幂零的.*

证. 很自然地会试图用逼近法证明本定理. 已给一个在对角线上方为零的核,可修改它的定义,使在一条平行于对角线的狭窄的带状区域上取值0,并证明所得的这个近似核诱导一个幂零算子. 这证明是可行的,但是必须小心谨慎地掌握这个逼近步骤. 应该记起(解 87),拟幂零算子的极限可能不是拟幂零的. 所谓小心掌握可以如下表述.

引理. *如果A是一个 Volterra 算子,又ε是一个正数,则存在 Volterra 算子B和C,又存在一个正整数k,使得(1) $A=B+C$, (2) $\|B\|<\varepsilon$且(3) 若干个B与若干个C的乘积,如果其中等于C的因子至少有k个,必等于0.*

引理的证明. (1) 令K表示诱导出A的 Volterra 核. K可以自然地分成一个很小的部分M和一个幂零的部分N,就是把

对角线下方的直角三角形 $E(=\{\langle x, y\rangle : x \geqslant y\})$ 劈分成一个对角的带状区域 $D(\delta)(=\{\langle x, y\rangle : 0 \leqslant x-y \leqslant \delta\})$ 和一个相似的平行三角形 $E(\delta)(=\{\langle x, y\rangle : x > y+\delta\})$. 这个自然的分法是可用的. 利用不定积分的绝对连续性,可选择 δ 使得 $\iint\limits_{D(\delta)} |K(x, y)|^2 dx\, dy < \varepsilon^2$. 令 M 在 $D(\delta)$ 中等于 K 而在他处等于 0, N 在 $E(\delta)$ 中等于 K 而在他处等于 0. 如果 B 和 C 分别是由 M 和 N 诱导的积分算子,则显然有 $A=B+C$.

(2) $\|B\| < \varepsilon$ 的证明是简捷的;由于 B 的核的 $\mathbf{L}^2$ 范数小于 ε, 得知 B 的算子范数小于 ε.

(3) C 有非常强的幂零性质,该性质的证明依赖于某些简单的关于积分的计算. BC 的核当 $x \geqslant y$ 时由 $\int_y^x M(x, z)\, N(z, y)\, dz$ 给出(当 $x<y$ 时当然取值 0). 断语: 如果 $\langle x, y\rangle \in D(\delta)$, 这个积分为零. 的确: 如果 $y \leqslant z \leqslant x$, 则 $0 \leqslant z-y \leqslant x-y \leqslant \delta$, 所以 $N(z, y)=0$. 更一般地有(可同样证明): 如果 B 和 C 是 Volterra 算子(不一定是上面所构造的那两个), 又如果 C 的核在 $D(\delta)$ 上取值 0, 则 BC 的核在 $D(\delta)$ 上取值 0. 其次: 当 $x \geqslant y$ 时 CB 的核由 $\int_y^x N(x, z) M(z, y)\, dz$ 给出. 断语: 如果 $\langle x, y\rangle \in D(\delta)$, 这个积分为零. 的确: 如果 $y \leqslant z \leqslant x$, 则 $0 \leqslant x-z \leqslant x-y \leqslant \delta$, 所以 $N(x, z)=0$. 更一般地有(可同样证明): 如果 B 和 C 是 Volterra 算子, 又如果 C 的核在 $D(\delta)$ 上取值 0, 则 CB 的核在 $D(\delta)$ 上取值 0. 概括地说: 对每一正数 δ, 其核在 $D(\delta)$ 上取值 0 的所有 Volterra 算子形成 Volterra 算子全体的代数的一个两侧理想. 最后, 当 $x \geqslant y$ 时 C^2 的核由 $\int_y^x N(x, z) N(z, y)\, dz$ 给出. 断语: 如果 $\langle x, y\rangle \in D(2\delta)$, 这个积分为零. 的确,如果 $0 \leqslant x-y \leqslant 2\delta$, 则对一切 z, 非 $x-z \leqslant \delta$, 必 $z-y \leqslant \delta$, 所以如非 $N(x, z)=0$, 必有 $N(z, y)=0$. 更一般地有(可同样证明): 如果 C_1 和 C_2 是 Volterra 算子,它们的核分别在 $D(\delta_1)$ 和 $D(\delta_2)$ 上取值 0, 则 C_1C_2 的核在 $D(\delta_1+\delta_2)$ 上取

值0. 这三个代数关系(BC, CB 和 C_1C_2)蕴涵所需要的结论. 考虑若干个 B 和若干个 C 所成的集并着手把它们乘起来. 每用一次因子 C, 核在其上取值 0 的那个带状区域就增宽 δ; 当用因子 B 时, 该带状区域至少不会缩小. 结论: 如果 k 是使 $k\delta>1$ 的最小整数, 则一当有 k 个因子等于 C 后, 该乘积就等于 0. 引理证完.

迄今所证明的是一个逼近引理; 它说的是, 每一个 Volterra 算子可以用"高度幂零"的 Volterra 算子来逼近. 象前文所期望的那样, 从这个逼近引理可以推出: 对每一正数 ε, 当 n 充分大时, 不等式 $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$ 成立. 要证明它, 可应用逼近引理, 但为方便计, 以 $\varepsilon/2$ 代替 ε. 由于 $A^n=(B+C)^n$, 得知如果 $n>k$ (这就是逼近引理所指出的 k), 则

$$\|A^n\|\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-i}\|C\|^i.$$

理由: 二项式定理所提供其它各项有 k 个或更多的因子等于 C, 所以(据(3))它们都等于 0. 现在如果 $0\leqslant i\leqslant k-1$, 则(根据一个实际是太宽余的估计)

$$\binom{n}{i}\leqslant n^k,$$

所以
$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot n^{k/n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-i}\|C\|^i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

这不等式右边第二、三两个因子当 n 变大时趋向于 1, 选择 n 足够大使它们的积的值小于 2, 证明便告完成.

解 148. $\|V\|=2/\pi$.

证. 直接去解答这个问题似乎没有什么出路. 下面介绍一个还算自然的间接方法: 算出 $\|V^*V\|$ 并求其平方根. 这所以是可行的, 其理由是 V^*V 不仅(如同 V)是紧的, 而且是自伴的. 由此知 V^*V 是对角的; 要求得它的范数, 有一个明显的方法就是去求它的最大特征值(注意 V^*V 是正的, 于是它的特征值都是正的). 由于 V^* 由

$$(V^*f)(x)=\int_x^1 f(y)dy$$

给出, 易求得诱导出 V^*V 的积分核. 简单的计算指明这个核, 譬

如说是 K, 由

$$K(x, y)=1-\max(x, y)=\begin{cases}1-x, & \text{如果 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 1-y, & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

给出. 由此推知对几乎每一个 x, 当 $f\in\mathbf{L}^2(0, 1)$时, 有

$$(V^*Vf)(x)=\int_0^1 f(y)dy-x\int_0^x f(y)dy-\int_x^1 yf(y)dy.$$

这提示我们可以这样地用显式来确定 V^*V 的特征值, 即置 $V^*Vf=\lambda f$, 微分(两次, 以消去所有积分), 并解所得微分方程. 在完成这些步骤时, 没有什么概念性的困难. 其结果是, 如果对 $k=0, 1, 2, \cdots$, 有

$$C_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)x}+e^{-i\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right),$$

则诸 C_k 形成 $\mathbf{L}^2$ 的一个就范正交基, 且每一 C_k 是 V^*V 的一个特征矢, 对应于特征值 $1\Big/\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2$. 这些特征值中的最大者是 $k=0$ 的那一个.

上面的纲要指明可以怎样去发现特征值和特征矢. 如果所要求的只是问题($\|V\|$等于多少?)的答案, 那只须验证诸 C_k 是 V^*V 的特征矢, 各对应于如上所述的特征值, 且诸 C_k 形成 $\mathbf{L}^2$ 的一个就范正交基, 就足够了. 第一步是常规的计算. 还需要第二步以保证 V^*V 没有别的比对应于诸 C_k 的任一特征值更大的特征值.

证明诸 C_k 形成一个基可用下面的方法. 对于 $\mathbf{L}^2$ 中的各个 f, 记

$$(Uf)(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x)e^{i\pi x/2}+f(1-x)e^{-i\pi x/2}\right).$$

易于验证 U 是一个酉算子. 如果 $e_n(x)=e^{2\pi inx}$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$, 则对于 $n=0, 1, 2, \cdots$, 有 $Ue_n=C_{2n}$, 对 $n=-1, -2, -3, \cdots$, 有 $Ue_n=C_{-(2n+1)}$.

解 149. $\Lambda(V_0)=\{0\}$, $\|V_0\|=4/\pi$.

证. 关于 V_0 的最有启发性的评注是它的值域包含于 $\mathbf{L}^2(-1, +1)$ 中的奇函数全体的集中(请记起 f 是偶的, 如果 $f(x)=f(-$

x)；而 f 是奇的，如果 $f(x)=-f(-x)$）．(由第一评注所启示的)第二个最有启发性的评注是，如果 f 是奇的，则 $V_0 f=0$．这两个评注蕴涵 V_0 是指数 2 的幂零算子，从而 V_0 的谱仅由 0 组成．

求出 V_0 的范数的一种尝试是把 $\mathbf{L}^2(-1, +1)$ 与 $\mathbf{L}^2(0, 1)\oplus\mathbf{L}^2(0, 1)$等同起来，确定 V_0 的（与这个等同映射相应）的 2×2 算子矩阵，并希望该矩阵的诸元素足够简单、熟悉，使范数的计算可以完成．把 $\mathbf{L}^2(-1, +1)$等同于$\mathbf{L}^2(0, 1)\oplus\mathbf{L}^2(0, 1)$的一个自然的方法是把 f 映射到 $\langle g, h\rangle$，此处 $g(x)=f(x)$ 且 $h(x)=f(-x)$ 当 $x\in(0, 1)$．这当然不错，但它不是我们该采用的最好方法．另一种 $\mathbf{L}^2(-1, +1)$到 $\mathbf{L}^2(0, 1)\oplus\mathbf{L}^2(0, 1)$上的等同映射与我们当前的目的关联更紧；它就是把 f 映射成 $\langle g, h\rangle$，其中，当 $x\in(0, 1)$ 时，

$$g(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \quad 且 \quad h(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)).$$

逆映射把 $\langle g, h\rangle$ 映成 f，这里，当 $x\in(0, 1)$时，

$$f(x)=h(x)+g(x) \quad 且 \quad f(-x)=h(x)-g(x).$$

由于
$$(V_0 f)(x)=2\int_0^x \frac{1}{2}(f(y)+f(-y))dy,$$

得知如果 $x\in(0, 1)$，则

$$(V_0 f)(x)=2(Vh)(x) \quad 且 \quad (V_0 f)(-x)=-2(Vh)(x).$$

结论可以表示成下式

$$V_0\langle g, h\rangle=\langle 2Vh, 0\rangle.$$

从这个表示式可以读出 V_0 的矩阵来；它就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2V & 0 \end{pmatrix}.$$

这再次证明 $V_0^2=0$，它还证明了 $\|V_0\|=2\|V\|$．

解 150． 如果 V 是 Volterra 积分算子，又如果 $A=(1+V)^{-1}$，则 $\Lambda(A)=\{1\}$ 且 $\|A\|=1$．

证．这例子是简单的，但它属于非凭灵感也得有经验才能提出的那一类(例子)，仅靠推理似乎是不够的．为了证明此例可用，

可先回忆 $\Lambda(V)=\{0\}$(参看问题146和74); 由此得知 $\Lambda(1+V)=\{1\}$, 因此 $1+V$ 是可逆的, 从而 A 的定义有意义. 由于 $\Lambda(1+V)=\{1\}$, 得知 $\Lambda(A)=\{1\}$. 由于 $r(A)=1$, 知 $\|A\|\geqslant 1$. 明显地有 $A\neq 1$. 这证明了除一个性质以外(我们所希望)的其它性质; 除不等式 $\|A\|\leqslant 1$ 外一切都是显然的.

要证明对一切 f 有 $\|Af\|\leqslant\|f\|$, 即 A 上有界且以 1 为上界, 有一种证法是去证明 A^{-1} 下有界且以 1 为下界. 由于

$$\|A^{-1}f\|^2=\|(1+V)f\|^2=(f+Vf,\ f+Vf)$$
$$=\|f\|^2+(Vf,\ f)+(V^*f,\ f)+\|Vf\|^2,$$

只须证明 $((V+V^*)f,\ f)\geqslant 0$(即 V 的实部是正的). 这是真的而且是已知的, 算子 $V+V^*$ 事实上是到常值函数的(一维)空间上的投影(参看问题148).

解 151. 令 $\{\alpha_n\}$ 表示权数序列, 于是 $\alpha_0\geqslant\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots$, $\alpha_n\neq 0$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$; 算子 A 如是给定: $Ae_0=0$ 且当 $n>0$ 时, $Ae_n=\alpha_{n-1}e_{n-1}$.

在所给的希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 中, 每一非 0 矢量 f 有一个"次数", 即是使富里叶系数 $(f,\ e_n)$ 非零的最大下标 n(或 ∞, 如果不存在最大的下标). 假设 $f\in\mathbf{M}$ 且 $\deg f$(f 的次数)$=n<\infty$. 容易看出矢量 $f,\ \cdots,\ A^nf$ 线性无关; 关键在于诸 α 的非零性蕴涵 $\deg A^if=n-i,\ i=0,\cdots,n$. 由于 $A^if\in\mathbf{M}_n,\ i=0,\ \cdots,\ n$, 得知 $\{f,\ \cdots,\ A^nf\}$ 的张成空间是 $\mathbf{M}_n$, 从而 $\mathbf{M}_n\subset\mathbf{M}$.

$\mathbf{M}$ 中非零矢量的次数或有界或非有界. 如果它们有界且其最大值是 n, 则 $\mathbf{M}\subset\mathbf{M}_n$, 而前段结果蕴涵 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_n$. 剩下的是要指明, 如果 $\mathbf{M}$ 是在 A 下不变的子空间且 $\mathbf{M}$ 中非零矢量的次数非有界, 则 $\mathbf{M}=\mathbf{H}$. 如果 $\mathbf{M}$ 含有具有任意大的有限次数的矢量, 则由前段, 有无穷多个 n, 使 $\mathbf{M}_n\subset\mathbf{M}$, 从而 $\mathbf{M}=\mathbf{H}$. 现在只须再考虑一种情况, 即 $\mathbf{M}$ 含有一个次数无穷的矢量.

考虑下述引理: 如果 $\mathbf{M}$ 是在 A 下不变的子空间, 又 $\mathbf{M}$ 含有一个次数无穷的矢量, 则 $\mathbf{M}$ 含有 e_0. 断语: 这引理蕴涵定理. 要

证明这一点，只须证明对一切 k 有 $\mathbf{M}_k\subset\mathbf{M}$ 就够了. 证明的思想是把基的开头几项略去不发生什么影响. 用准确的语言表达就是说，证明是对 k 施行归纳法. 归纳法的第一步骤就是该引理本身. 现在假设 $\mathbf{M}_k\subset\mathbf{M}$，令 P_k 表示到 $\mathbf{M}_k^\perp$ 上的投影，并令 A_k 表示 $\mathbf{M}_k^\perp$ 上的算子，其定义为：对 $\mathbf{M}_k^\perp$ 中的每一 f，有 $A_kf=P_kAf$. 归纳假设蕴涵对一切 $f\in\mathbf{M}$ 有 $P_kf\in\mathbf{M}$，从而 $\mathbf{M}\cap\mathbf{M}_k^\perp$ 在 A_k 下不变. 由于 A_k 是 $\mathbf{M}_k^\perp$ 上一个(关于就范正交基 $\{e_k, e_{k+1}, \cdots\}$ 的) 加权移位的伴随算子，它正好满足 A 在 $\mathbf{H}$ 上所满足的同样条件，又由于 $\mathbf{H}$ 中次数无穷的矢量在 P_k 下的象在 $\mathbf{M}_k^\perp$ 中 (关于基$\{e_k, e_{k+1}, \cdots\}$) 也具有无穷次数，引理可以应用. 结论是，$\mathbf{M}\cap\mathbf{M}_k^\perp$ 含有 e_k(因此特别有 $e_k\in\mathbf{M}$，由此得 $\mathbf{M}_k\subset\mathbf{M}$)，而从引理到定理的推导已告完成.

现在转而证明引理. 假设 $f\in\mathbf{M}$ 且 $\deg f=\infty$. 如果 $f=\sum_{i=0}^{\infty}\xi_ie_i$，则

$$A^nf=\sum_{i=n}^{\infty}\xi_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{i-n}e_{i-n}.$$

如果 n 使 $\xi_n\neq0$，则

$$\frac{1}{\xi_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_0}A^nf=e_0+f_n,$$

其中
$$f_n=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\xi_i}{\xi_n}\cdot\frac{\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{i-n}}{\alpha_{n-1}\cdots\alpha_0}e_{i-n}.$$

现在只须证明，对每一正数 ε，可以选择整数 n 以使 $\|f_n\|<\varepsilon$. 为此，先选定 k 使

$$\sum_{i=k}^{\infty}\alpha_i^2<\varepsilon^2\alpha_0^2,$$

然后选定 n，使得 $n\geqslant k$ 且使

$$|\xi_n|=\max\{|\xi_i|:i\geqslant k\}.$$

这样选定的 n 使 $\xi_n\neq0$，且若 $i\geqslant n$，则 $|\xi_i/\xi_n|\leqslant1$. 还可以看到如果 $i\geqslant n+1$，则 $\alpha_{i-2}\leqslant\alpha_{n-1}$，$\cdots$，$\alpha_{i-n}\leqslant\alpha_1$ (单调性就在这里用到). 结论：

$$\|f_n\|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{\xi_n}\right|^2\left(\frac{\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{i-n}}{\alpha_{n-1}\cdots\alpha_0}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_0}\right)^2=\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_0}\right)^2<\varepsilon^2.$$

第十六章 次正规算子

解 152. 修改 Fuglede 定理的每一个已知的证明，都可用以推出这个推广了的结论．通过算子矩阵，还有一个可供选择的简洁证法，它可以从一个正规算子的命题导出两个正规算子的命题．记

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\quad 而\quad \hat{B}=\begin{pmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

算子 $\hat{A}$ 是正规的，通过直捷的验算可证 $\hat{B}$ 与它可交换．Fuglede 定理蕴涵 $\hat{B}$ 也与 $\hat{A}^*$ 可交换，而(按两种次序将矩阵 $\hat{A}^*$ 与 $\hat{B}$ 相乘并比较积的对应元素)这又蕴涵所希望的结论．

问题的系需要稍多一些的论证．如果 B 可逆，且 UP 是它的极分解，则 U 是酉算子，而 P 自然恒是 B^*B 的正平方根．如果 A_1 和 A_2 是正规算子且 $A_1B=BA_2$，则

$$A_2(B^*B)=(A_2B^*)B=(B^*A_1)B=B^*(A_1B)$$

$$=B^*(BA_2)=(B^*B)A_2,$$

因此 $$A_2P^2=P^2A_2;$$

由此得知 $$A_2P=PA_2$$

(与解 108 比较)．由于 A_1UP(据假设)$=UPA_2$(据刚才证明的结果)$=UA_2P$，得知 $A_1U=UA_2$，系证完．

在 Rosenblum[1958]中有一个惊人地漂亮而简单的 Putnam-Fuglede 定理的证明．原来的证明见于 Fuglede[1950]；它的一个变异见于 Halmos[1951, §41]或 Halmos[1963b]；两算子的推广首先见于 Putnam[1951b]．从 Fuglede 到 Putnam 定理的巧妙

的矩阵推导属于 Berberian[1959].

解 153. 如果 $\chi_{\varphi^{-1}_{(D)}} f=f$, 则$\{x:f(x)\neq 0\}\subset\varphi^{-1}(D)$, 所以

$$\|A^n f\|^2=\int|\varphi^n f|^2 d\mu=\int_{\varphi^{-1}(D)}|\varphi^n f|^2 d\mu\leqslant\int_{\varphi^{-1}(D)}|f|^2 d\mu=\|f\|^2.$$

反之, 如果对一切 n 有 $\|A^n f\|\leqslant\|f\|$, 又 $M_r=\{x:|\varphi(x)|\geqslant r>1\}$, 则

$$\|f\|^2\geqslant\int|\varphi^n f|^2 d\mu\geqslant\int_{M_r} r^{2n}|f|^2 d\mu.$$

除非 f 在 M_r 上取值 0, 上式中最右边的积分将随着 n 趋于无穷大. 结论: 对每一个 r, f 在 M_r 上取值 0, 所以 $\{x:f(x)\neq 0\}\subset\varphi^{-1}(D)$.

解 154. 从以下的考察开始较为方便: 如果 A 是拟正规的, 则 $\ker A$ 约化 A. 理由: 对每一个算子 A 有: $\ker A=\ker A^*A$; 由于拟正规性蕴涵 A^* 与 A^*A 可交换, 得知 $\ker A^*A$ 在 A^* 下不变.

考虑到前段的结果, 可知每一个拟正规算子是 0 和一个具有平凡核的算子的直接和. 由于两直和加项可以分开处理, 无损于普遍性, 可以首先假定 $\ker A=\{0\}$. 在这种情况下, 如果 UP 是 A 的极分解, 则 U 是一个等距算子, 且(据问题 108) $UP=PU$ 而 $U^*P=PU^*$. U 的等距性质蕴涵, 如果 E 表示投影 UU^*, 则 $(1-E)U=U^*(1-E)=0$. 考虑到这些代数关系, 可以用显式构造一个 A 的正规扩张以证明 A 是次正规的. 如果 A 作用于 $\mathbf{H}$ 上, 则可以构造一个作用于 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 上的正规扩张 B (使 $\mathbf{H}$ 等同于 $\mathbf{H}\oplus\{0\}$, 则 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 的子空间). $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 上的算子由一个 2×2 矩阵给出, 该矩阵的元素是 $\mathbf{H}$ 上的算子. 特别有, 如果,

$$V=\begin{pmatrix}U & 1-E\\ 0 & U^*\end{pmatrix}\quad\text{且}\quad Q=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{pmatrix},$$

则 V 是酉算子, Q 是正算子, V 与 Q 可交换, 所以

$$B=\begin{pmatrix}UP & (1-E)P\\ 0 & U^*P\end{pmatrix}$$

是 A 的正规扩张.

解 155. 令 $\mathbf{M}_1$ 表示形如 $\sum_j B_1^{*j}f_j$ 的有限和全体的集，这里，$f_j\in\mathbf{H}$ 对一切 $j(=0, 1, 2, \cdots)$ 成立．集 $\mathbf{M}_1$ 是一个线性流形；由于 $B_1(\sum_j B_1^{*j}f_j)=\sum_j B_1^{*j}(B_1f_j)$ 且 $B_1^*(\sum_j B_1^{*j}f_j)=\sum_j B_1^{*j+1}f_j$，所以 $\mathbf{M}_1$ 的闭包约化 B_1．由于 $\mathbf{H}$ 本身也包含在 $\mathbf{M}_1$ 内，B_1 的极小性蕴涵 $\mathbf{K}_1=\overline{\mathbf{M}}_1$．同理，形如 $\sum_j B_2^{*j}f_j$（这里的各个 f_j 在 $\mathbf{H}$ 中）的有限和全体的集 $\mathbf{M}_2$ 当然也在 $\mathbf{K}_2$ 中稠密．

尝试置 $U(\sum_j B_1^{*j}f_j)=\sum_j B_2^{*j}f_j$ 以完成证明是有吸引力的．这是行得通的，但要小心一些．首先：这个方程果真定义了什么（算子）吗？就是说：如果 $\sum_j B_1^{*j}f_j=\sum_j B_1^{*j}g_j$（$f_j$ 和 g_j 属于 $\mathbf{H}$），是否必然有 $\sum_j B_2^{*j}f_j=\sum_j B_2^{*j}g_j$？等价地说（相减）：如果 $\sum_j B_1^{*j}f_j=0$，是否必然有 $\sum_j B_2^{*j}f_j=0$？答案是"对"；理由包含于下列计算中：

$$\|\sum_j B_1^{*j}f_j\|^2=(\sum_j B_1^{*j}f_j, \sum_k B_1^{*k}f_k)$$
$$=\sum_j\sum_k(B_1^kf_j, B_1^jf_k)=\sum_j\sum_k(A^kf_j, A^jf_k).$$

这个计算的成就远不止证明了 U 已经无疑义地得到定义；它还蕴涵 U 是一个（从 $\mathbf{M}_1$ 到 $\mathbf{M}_2$ 上的）等距变换，而因此 U 有唯一的等距扩张，它把 $\mathbf{K}_1$ 映射到 $\mathbf{K}_2$ 上，以及 U 是 $\mathbf{H}$ 上的恒等算子．$UB_1=B_2U$ 的证明也是一个计算．只须验证在 $\mathbf{M}_1$ 上 UB_1 与 B_2U 全同就够了，而下列算式蕴涵了这一点：

$$UB_1(\sum_j B_1^{*j}f_j)=U(\sum_j B_1^{*j}B_1f_j)=\sum_j B_2^{*j}Af_j$$
$$=\sum_j B_2^{*j}B_2f_j=B_2\sum_j B_2^{*j}f_j=B_2U(\sum_j B_1^{*j}f_j).$$

解 156. *存在着两个相似而不酉等价的次正规算子．*

证． 考虑由单位圆及其圆心组成的测度空间，定义测度 ν 使在圆上成为规范化的勒贝格测度而在圆心则是一个单位质量．令 B 表示 $\mathbf{L}^2(\nu)$ 上的位置算子（即 $(Bf)(z)=zf(z)$），并令 A 表示它在多项式全体的闭包 $\mathbf{H}^2(\nu)$ 上的限制．显然，B 是正规的而 A 是次正规的．

$\mathbf{H}^2(\nu)$有一个就范正交基由函数 $e_n(n=1, 2, 3, \cdots)$以及函数 e_0 组成，e_n 由 $e_n(z)=z^n$ 定义，而 e_0 由 $e_0(z)=1/\sqrt{2}$ 定义．A 在这个基上的作用容易描述：$Ae_0=(1/\sqrt{2})e_1$ 而 $Ae_n=e_{n+1}$ 对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 成立．换句话说，A 是一个单侧加权移位，具有权数序列 $\{1/\sqrt{2}, 1, 1, 1, \cdots\}$．从问题 76 得知（但直接验证也一样地容易）$A$ 相似于通常不加权的单侧移位 U．证明 U 和 A 不酉等价的方法有几种．其中的一法是回忆起两个单侧加权移位酉等价必须它们的对应的权数有相等的模(参看问题 76)；可是最简单的方法是注意到 U 是一个等距算子而 A 则不是．

值得注意的是，B 是 A 的极小正规扩张(参看问题 155)，这不是一目了然的，但很容易证明．由此又可推知 U 与 A 不是酉等价的．理由：它们的极小正规扩张不酉等价．

本例属于 D. E. Sarason．

解 157． 待证的是，如果 λ 是一个使 $B-\lambda$ 不可逆的复数，则 $A-\lambda$ 也不可逆．据简单的几何学（平移）和同样简单的逻辑(取逆否命题)，该断语约化成：如果 A 是可逆的，则 B 也是．所以假设 A 是可逆的；无损于普遍性，可规范化使 $\|A^{-1}\|=1$．令 s 表示开区间$(0, 1)$中随意取的一数，以下固定下来，并记 $E=\{f: \|B^n f\|\leqslant s^n\|f\|, n=1, 2, 3, \cdots\}$． 如果 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 是 A 和 B 的定义域，又 $f\in\mathbf{E}$ 而 $g\in\mathbf{H}$，则

$$\begin{aligned}|(f, g)|&=|(f, A^nA^{-n}g)|=|(f, B^nA^{-n}g)|\\&=|(B^{*n}f, A^{-n}g)|\leqslant\|B^{*n}f\|\cdot\|A^{-n}g\|\\&=\|B^nf\|\cdot\|A^{-n}g\|\leqslant s^n\cdot\|f\|\cdot\|g\|\end{aligned}$$

对一切 n 成立；从而有，$(f, g)=0$．换句话说，$\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$ 且因此 $\mathbf{H}\subset\mathbf{E}^{\perp}$．由于(问题 153)$\mathbf{E}$ 是 B 的一个约化子空间，得知 $\mathbf{E}^{\perp}=\mathbf{K}$，因此 $\mathbf{E}=\{0\}$；从此接着又推知(参看问题 153)B 是可逆的．

解 158． 证明依赖于 A 与 B 的谱之间的一个不很显易的关系式，即谱包含定理，

$$\Lambda(B)\subset\Lambda(A),$$

也依赖于一个关于谱的包含的显易的事实，

$$\Pi(A)\subset\Pi(B).$$

对于任意一对算子 A 和 B，只要它们的谱和近似点谱之间有上述的关系，结论都能成立；不需要次正规和正规算子的更深或更特殊的性质.

考虑集 $\Delta^-=\Delta-\Lambda(A)$ 和 $\Delta^+=\Delta\cap\Lambda(A)$. 由于 Δ 是开的而 $\Lambda(A)$ 是闭的，所以集 Δ^- 是开的. 断语：Δ^+ 也是开的. 为了证明此理，考虑 Δ^+ 中任意点 λ. 由于 $\lambda\in\Delta$ 而 Δ 是 $\Lambda(B)$ 的一个洞，点 λ 不能属于 $\Lambda(B)$. 这当然蕴涵 λ 不属于 $\Pi(B)$，因而 λ 不属于 $\Pi(A)$，从而 λ 不在 $\Lambda(A)$ 的边界上（参看问题 63）. 可是由于 $\lambda\in\Delta^+$ 而 $\Delta^+\subset\Lambda(A)$，得知 λ 只能位于 $\Lambda(A)$ 的内部. 这个论证证明了 Δ^+ 事实上是 Δ 与 $\Lambda(A)$ 的内部的交，而因此推知，如所断言，Δ^+ 是开的.

由于 Δ 是不相交开集 Δ^- 和 Δ^+ 的并，Δ 的连通性蕴涵它们中必有一个是空集.

这个结果属于 Bram[1955]; Itô[1958] 中有一个推广. 上面的简单证明属于 S. K. Parrott.

解 159. *在正规算子 B 作用下不变的有限维子空间必约化 B.*

证. 由于在有限维空间上每一个算子有特征值，只须证明 B 的每一个一维不变子空间约化 B 就够了. 这是容易证明的. 事实上，B 的每一个特征矢也是 B^* 的特征矢（如果 $Bf=\lambda f$，则据正规性，

$$0=\|(B-\lambda)f\|=\|(B^*-\lambda^*)f\|).$$

系. *在有限维子空间上每一个次正规算子是正规的.*

证. 正规算子在它的约化子空间上的限制是正规的.

由如上证明了的结果得知问题 159 的答案是"否". 理由：如果 B 是 A 到 $\mathbf{K}$ 上的正规扩张，则 $\mathbf{K}\cap\mathbf{H}^\perp$ 在正规算子 B^* 下不变，所以，如果 $\dim(\mathbf{K}\cap\mathbf{H}^\perp)$ 是有限的，则 $\mathbf{H}$ 约化 B. 由于已经假定 A 非正规，这是不可能的.

解 160. 困难在于要证明某些对象不是次正规的. 由于次

正规算子的定义要求某些对象的存在性，因此现在需要的是一个不存在性定理．证明这一类定理的最好方法（唯一的方法？）是先假定存在性，从它引导出一个可用的“构造性”的必要条件（碰巧的话，它将同时是充分的），并探究有什么与该条件抵触的．

如果（在 $\mathbf{K}$ 上的）B 是（在 $\mathbf{H}$ 上的）A 的正规扩张，又 $f_0, \cdots, f_n$ 是 $\mathbf{H}$ 中的矢量，则 $\|\sum_j B^{*j}f_j\| \geqslant 0$．这个显易的事实可以按一种非显易的方式重新写出如下：

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant (\sum_j B^{*j}f_j, \sum_i B^{*i}f_i) = \sum_j\sum_i (B^{*j}f_j, B^{*i}f_i) \\
&= \sum_j\sum_i (B^iB^{*j}f_j, f_i) = \sum_j\sum_i (B^{*j}B^if_j, f_i)\text{（因为 } B \text{ 是正规的）} \\
&= \sum_j\sum_i (B^if_j, B^jf_i) = \sum_j\sum_i (A^if_j, A^jf_i).
\end{aligned}
$$

将每一 f_j 改换成它的某数量倍 ξ_jf_j，即得结论

$$
\sum_j\sum_i (A^if_j,\ A^jf_i)\xi_j^*\xi_i \geqslant 0,
$$

就是说，有限矩阵 $\langle(A^if_j, A^jf_i)\rangle$ 是正定的．这是次正规性要求的一个“构造性”的内在的必要条件；我们要利用它来展示一个亚正规而非次正规的算子．可是首先给出下面的评论是适宜的，这就是说，这个条件对于次正规性不仅必要还是充分的．精确地说：如果对矢量的每个有限集 $f_0, \cdots, f_n$，对应的矩阵 $\langle(A^if_j, A^jf_i)\rangle$ 是正定的，则算子 A 是次正规的．证明相当冗长；这事实在后文中也没有用到．

我们所希望的反例可以从加权移位中找到．带权数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 的加权移位 S 怎样才会成为亚正规的？由于 S^*S 和 SS^* 都是对角算子，通过诸 α 可以得到一个简易的答案．S^*S 的对角线是 $\{|\alpha_0|^2, |\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, \cdots\}$，而 SS^* 的对角线是 $\{0, |\alpha_0|^2, |\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, \cdots\}$；由此得知 S 是亚正规的当且仅当序列 $\{|\alpha_n|\}$ 单调增加．

有这么多信息可资利用，沿着这些路线构造反例（只要这是可能的）该是容易的了．有限量的试验可能就会引出带权数 $\{\alpha, \beta, 1, 1, 1, \cdots\}$ 的加权移位 S 来，这里，$0<\alpha<\beta<1$．前段的结果蕴

涵 S 是亚正规的，为了证明 S 不是次正规的，可检查矩阵 $\langle(S^ie_j, S^je_i)\rangle$，这里的 $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ 是 S 所移动的就范正交基，而 i 和 j 取值 0, 1, 2. 这矩阵明显地表示出来就是

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha\beta \\ \alpha & \beta^2 & \beta \\ \alpha\beta & \beta & 1 \end{pmatrix},$$

它的行列式是 $-\alpha^2(1-\beta^2)^2$，是负的.

这一类例子 J. G. Stampfli 曾经研究过.

解 161. "当"的部分，对正规的部分等距算子说是显而易见的，对次正规的说，是问题 118 的一个推论.（关键在于典型的非酉等距算子，即单侧移位是次正规的.）为了证明"只当"，可假设 U 是一个部分等距算子，因此 U^*U 是在始空间（核的正交补）上的投影，而 UU^* 是在终空间（值域）上的投影. 如果 U 是次正规的，则它是亚正规的，从而始空间包含值域. 这蕴涵始空间在 U 下不变，因而它约化 U；显然，U 在始空间上的限制是一个等距算子. 如果 U 还是一个正规算子，则始空间等于其值域，所以 U 在始空间上的限制是一个酉算子.

（作为上面的证明的一个推论）注意到下述事实是有趣的，即一个部分等距算子是次正规的当且只当它是亚正规的.

解 162. $n=1$ 时，等式是显而易见的；以下用数学归纳法论证. 由于

$$\begin{aligned}\|A^nf\|^2 &= (A^nf, A^nf) = (A^*A^nf, A^{n-1}f) \\ &\leqslant \|A^*A^nf\|\cdot\|A^{n-1}f\| \leqslant \|A^{n+1}f\|\cdot\|A^{n-1}f\| \\ &\leqslant \|A^{n+1}\|\cdot\|A^{n-1}\|\cdot\|f\|^2\end{aligned}$$

对每一个矢量 f 成立，得知

$$\|A^n\|^2 \leqslant \|A^{n+1}\|\cdot\|A^{n-1}\|.$$

考虑到归纳假设（当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时有 $\|A^k\|=\|A\|^k$），这可以改写成

$$\|A\|^{2n} \leqslant \|A^{n+1}\|\cdot\|A\|^{n-1},$$

由此得知

$$\|A\|^{n+1} \leqslant \|A^{n+1}\|.$$

由于反向不等式普遍成立，归纳步骤已告完成.

参考文献：Andô[1963]，Stampfli [1962]．上述证明是就 Stampfli 的简单证明再稍加简化．

解 163．假设 A 是亚正规的．我们的计划是先证明 A 的特征矢全体的张成空间约化 A；暂时还没用到紧性．紧性出现后这个张成空间的正交补变得易处理了；应用问题 162 即得到结论．

(1) 对每一复数 λ，有

$$\{f:Af=\lambda f\}\subset\{f:A^*f=\lambda^*f\}.$$

理由是，$A-\lambda$，正同 A 一样，也是亚正规的，而且，根据一个不必涉及亚正规性的一般原理，知 $(A^*-\lambda^*)f=0$ 的一个充要条件是

$$(A-\lambda)(A^*-\lambda^*)f=0.$$

(2) 对每一复数 λ，子空间 $\{f:Af=\lambda f\}$ 约化 A．的确：在 A 下不变是显而易见的，而在 A^* 下不变从(1)即知．

(3) 如 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则

$$\{f:Af=\lambda_1 f\}\perp\{f:Af=\lambda_2 f\}.$$

一个直捷而常用的论证：如果 $Af_1=\lambda_1 f_2$ 且 $Af_2=\lambda_2 f_2$，则

$$\lambda_1(f_1,\ f_2)=(Af_1,\ f_2)=(f_1,\ A^*f_2)=\lambda_2(f_1,\ f_2).$$

(4) A 的特征矢全体的张成空间约化 A 且 A 在这个张成空间上的限制是正规的．证明：应用(2)并且注意到，据(3)[注]，A 在每个特征子空间上的限制是正规的(事实上它等于一个倍乘算子)．

(5) 现在假定 A 是紧的，并考虑 A 在特征矢全体的张成空间的正交补上的限制．所得算子仍是亚正规的(据(4)的关于约化的断语)且仍是紧的．由于这个紧算子的点谱是空集，它是拟幂零的(问题 140)；应用问题 162 就能推得它必须是零算子．如果这个算子作用其上的这个正交补不是$\{0\}$，就必然发生矛盾：它的非零矢量既必须是又不可能是对应于特征值 0 的特征矢．

解 164．令 $\mathbf{V}$ 表示一个希耳伯特空间且 $\mathbf{H}$ 表示以整数全体(正、负或 0)为下标集的可数多个 $\mathbf{V}$ 的摹本的直接和．明显表示

〔注〕“据(3)”下面的一句话，其实普遍成立，因此此处如改为“应用(2)，(3)并且注意到 A 在…”，似较妥．——译者注

出来. $\mathbf{H}$ 就是使得 $\sum_n \|f_n\|^2<\infty$ 的 $\mathbf{V}$ 中的矢量的序列

$$f=\langle\cdots, f_{-1}, (f_0), f_1, \cdots\rangle$$

全体的集; f 和 g 的内积依 $(f, g)=\sum_n (f_n, g_n)$ 定义. 如果 $\{S_n: n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是一个使得范数序列 $\{\|S_n\|\}$ 有界的 $\mathbf{V}$ 上的正算子序列, 则方程 $(Sf)_n=S_nf_n$ 定义一个 $\mathbf{H}$ 上的算子 S. 如果 W 是由 $(Wf)_n=f_{n-1}$ 定义的移位, 则 W 是 $\mathbf{H}$ 上的一个算子. 伴随算子容易算出: $(S^*f)_n=S_n^*f_n=S_nf_n$ (因此 S 是自伴的, 且事实上是正的), 而 $(W^*f)_n=f_{n+1}$ (因此 W 可逆, 且事实上是酉算子).

如果 $A=WS$, 则 $(Af)_n=S_{n-1}f_{n-1}$; 由于 $A^*=SW^*$, 得知 $(A^*f)_n=S_nf_{n+1}$. 这些关系蕴涵 $(A^*Af)_n=S_n^2f_n$ 且 $(AA^*f)_n=S_{n-1}^2f_n$, 从而 A 是亚正规的当且仅当序列 $\{S_n^2\}$ 是增加的. 另一方面, $(A^2f)_n=S_{n-1}S_{n-2}f_{n-2}$, 且 $(A^{*2}f)_n=S_nS_{n+1}f_{n+2}$, 所以 $(A^{*2}A^2f)_n=S_nS_{n+1}^2S_nf_n$ 且 $(A^2A^{*2}f)_n=S_{n-1}S_{n-2}^2S_{n-1}f_n$, 因此 A^2 是亚正规的当且只当 $S_{n-1}S_{n-2}^2S_{n-1}\leqslant S_nS_{n+1}^2S_n$ 对一切 n 成立.

剩下的工作是去选择 $\mathbf{V}$ 和诸 S_n 使得 A 是亚正规的而 A^2 不是. 构造方法建基于存在着正算子 C 和 D 使得 $C\leqslant D$ 是真的但 $C^2\leqslant D^2$ 则是谬误的. 例如, 设 $\mathbf{V}$ 是二维的, 因此 $\mathbf{V}$ 上的算子可以与二乘二矩阵等同起来; 又如果

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad 而 \quad D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$D-C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\geqslant 0,$$

但

$$D^2-C^2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

它有一个负的行列式. 如果这样定义 S_n: 当 $n\leqslant 0$ 时, S_n 是 C 的正平方根(它等于 C), 而 $n>0$ 时, S_n 是 D 的正平方根, 则对一切 n 有 $S_n^2\leqslant S_{n+1}^2$, 因此 A 是亚正规的, 但是, 如果 $n=1$, 则 $S_{n-1}S_{n-2}^2S_{n-1}=C^2$ 而 $S_nS_{n+1}^2S_n=D^2$, 因此 A^2 不是亚正规的.

解 165. 如果 U 是酉算子, P 是正而可逆的, $C=P^{-1}UP$, 且

$A=UP$，则 C 是一个压缩算子的充要条件是 A 是亚正规的。

证. 在所作假定下，下列诸断语是相互等价的：

$$CC^*\leqslant 1,$$

$$P^{-1}UP^2U^*P^{-1}\leqslant 1,$$

$$UP^2U^*\leqslant P^2,$$

$$(UP)(UP)^*\leqslant (UP)^*(UP),$$

$$AA^*\leqslant A^*A.$$

问题 165 中所表达的问题的解答，现在相对地说，是容易的了. 如果 W 是酉算子，S 是可逆的，且 $C=S^{-1}WS$，则可以考虑 S 的极分解 VP，并注意到 $C=P^{-1}UP$，这里的 $U(=V^{-1}WV)$ 是酉算子而 P 是正的. 推论：只须考虑酉算子在正算子下的变换就够了，对这些变换说，可以适用刚才证明了的陈述.

其次试考察，在上面列举的五个关系式中，如果"$\leqslant$"各以"$=$"代替，所得关系式仍旧是相互等价的. 推论 1：在有限维空间上，与酉算子相似的压缩算子必是酉算子. 理由：在有限维空间上，每一个亚正规算子是正规的. 推论 2：在无穷维空间上，与酉算子相似的压缩算子不一定是酉算子. 理由：存在着非正规的可逆亚正规算子（注意如果 A 是亚正规的，则对每一个数量 λ，$A+\lambda$ 是亚正规的）.

上面的论证属于 R. G. Douglas.

第十七章 数值值域

解 166. 假设 A 是希耳伯特空间上的算子，又 $\xi=(Af, f)$，$\eta=(Ag, g)$，f 和 g 都是单位矢. 问题是要证明联结 ξ 和 η 的线段上的每一点属于 $W(A)$. 两个初步的约化将使证明化简.

如果 $\xi=\eta$，问题是显易的. 如果 $\xi\neq\eta$，则存在复数 α 和 β 使得 $\alpha\xi+\beta=1$ 而 $\alpha\eta+\beta=0$. 只须证明单位区间 $[0, 1]$ 包含于 $W(\alpha A+\beta)(=\alpha W(A)+\beta)$ 中就够了. 理由：如果 $\alpha(Ah,h)+\beta=t$，则

$$\alpha(Ah,\ h)+\beta=t(\alpha\xi+\beta)+(1-t)(\alpha\eta+\beta)$$
$$=\alpha(t\xi+(1-t)\eta)+\beta.$$

推论：无损于普遍性，可首先假定 $\xi=1$ 而 $\eta=0$.

记 $A=B+iC$, B, C 都是自伴算子. 由于 $(Af,\ f)$ $(=1)$ 和 $(Ag,\ g)(=0)$是实数，得知$(Cf,\ f)$和$(Cg,\ g)$ 都等于 0. 如果把 f 换成λf, $|\lambda|=1$, 则$(Af,\ f)$保持不变而$(Cf,\ g)$变成$\lambda(Cf,g)$. 推论：无损于普遍性，可假定$(Cf,\ g)$是纯虚数.

约定施行这些约化之后，可置 $h(t)=tf+(1-t)g$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 断语：$h(t)$不可能是0；事实上矢量 f 与 g 线性无关. 这是 $(Af,\ f)\neq(Ag,\ g)$的一个推论. 的确，如果 f 和 g 是线性相关的，则由于它们是单位矢，任一个可以写成另一个的倍数. 由于倍数必须有绝对值 1, 将推出$(Af,\ f)=(Ag,\ g)$.

由于

$$(Ch(t),\ h(t))=t^2(Cf,\ f)+t(1-t)((Cf,\ g)$$
$$+(Cf,\ g)^*)+(1-t)^2(Cg,\ g),$$

关系式 $(Cf,\ f)=(Cg,\ g)=0$ 和 $\mathrm{Re}(Cf,\ g)=0$ 蕴涵对一切 t 有 $(Ch(t),\ h(t))=0$, 从而对一切 t, $(Ah(t),\ h(t))$ 是实数. 这就是我们所需要的一切. 函数

$$t\to(Ah(t),\ h(t))/\|h(t)\|^2$$

是实值的且在闭单位区间上连续；其在 0 和 1 的值分别是 0 和 1. 结论：函数的值域含有单位区间中的每一数.

这个证明的设计属于 C. W. R. de Boor.

解 167. 对每一个算子和每一个正整数 k, k-数值值域 $W_k(A)$是凸的.

证. 开始时先假设 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 是 k 维希耳伯特空间且 T 是自 $\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{N}$ 中的线性变换. T 和 T^*(自 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{M}$ 中)可以在一个有用的意义下同时对角化. 这表达成断语就是：存在着 $\mathbf{M}$ 的就范正交基 $\{f_1,\ \cdots,\ f_k\}$ 和 $\mathbf{N}$ 的就范正交基$\{g_1,\ \cdots,\ g_k\}$且存在正的$(\geqslant 0)$数量 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k$ 使得 $Tf_i=\alpha_i g_i$ 且 $T^*g_i=\alpha_i f_i$, $i=1,\ \cdots,\ k$. 为了证明它，令 UP 表示 T 的极分解，且对角化 P. 就是说，求一个

$\mathbf{M}$ 的就范正交基 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 并求正的数量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $Pf_i=\alpha_i f_i$. 如果部分等距算子 U 不是自 $\mathbf{M}$ 到 $\mathbf{N}$ 上的等距算子，可以换成这样的一个（由于 $\dim\mathbf{M}=\dim\mathbf{N}=k$）；假定我们已经这样做了. 然后置 $g_i=Uf_i$, $i=1, \cdots, k$, 就能获得如下推论：$Tf_i=UPf_i=U(\alpha_i f_i)=\alpha_i g_i$, 且 $T^*g_i=PU^*g_i=Pf_i=\alpha_i f_i$, $i=1, \cdots, k$.

这是一个引理，现在来证明定理. 假设 P 和 Q 是 k 秩投影，分别具有值域 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$. 如果 T 是 QP 在 $\mathbf{M}$ 上的限制，则上面的引理可以适用. 对每一 $i(=1, \cdots, k)$，令 $\mathbf{L}_i$ 表示 f_i 和 g_i 的张成空间. 断语：子空间 $\mathbf{L}_i$ 两两正交. 的确，假设 $i\neq j$; 由于 $f_i\perp f_j$ 且 $g_i\perp g_j$, 只须证明 $f_i\perp g_j$（因为据对称性，由此即得 $f_j\perp g_i$）. 证明是容易的：

$$(f_i, g_j)=(Pf_i, Qg_j)=(QPf_i, g_j)=(\alpha_i g_i, g_j).$$

所希望的凸性的证明已经近在眉睫. 如果 $0\leqslant t\leqslant 1$, 使用经典的 Toeplitz-Hausdorff 定理 k 次可在 $\mathbf{L}_i$ 中得单位矢量 h_i, 使得

$$(Ah_i, h_i)=t(Af_i, f_i)+(1-t)(Ag_i, g_i).$$

由于 $\{h_1, \cdots, h_k\}$ 是一个就范正交集，到这集张成的子空间上的投影 R 有秩 k, 且

$$t\cdot\operatorname{tr}PAP+(1-t)\cdot\operatorname{tr}QAQ=t\cdot\sum_i(Af_i, f_i)$$
$$+(1-t)\cdot\sum_i(Ag_i, g_i)=\sum_i(Ah_i, h_i)=\operatorname{tr}RAR.$$

定理证毕.

这个问题由 Halmos[1964] 提出. 第一个解答，它比上面的解答稍为复杂，属于 C. A. Berger.

解 168. 如果 A 是一个算子而 λ 是一个复数，使得 $|\lambda|=\|A\|$ 且 $\lambda\in W(A)$, 则 λ 是 A 的一个特征值.

证. 如果 $\lambda=(Af, f)$ 而 $\|f\|=1$, 则

$$\|A\|=|\lambda|=|(Af, f)|\leqslant\|Af\|\cdot\|f\|\leqslant\|A\|,$$

因此等号处处成立. 熟知的关于 Schwarz 不等式变成等式时的事实蕴涵对某一 λ_0 有 $Af=\lambda_0 f$, 而这又接着蕴涵

$$\lambda_0=\lambda_0(f, f)=(\lambda_0 f, f)=(Af, f)=\lambda,$$

因此λ是A的一个特征值.

从这个定理得知，如果λ是$\overline{W(A)}$中的一个数，使得$|\lambda|=\|A\|$且λ不是A的特征值(特别是，如果A没有特征值)，则λ不属于$W(A)$. 考虑到这个评论，不难构造出数值值域非闭的算子的例.

(1) 注意到每一个算子A的特征值属于$W(A)$(证明：如果$Af=\lambda f$而$\|f\|=1$,则$(Af, f)=\lambda$). 如果A是正规的,则$\|A\|=\sup\{|\lambda|:\lambda\in W(A)\}$,因此恒存在一个$\lambda\in\overline{W(A)}$使得$|\lambda|=\|A\|$. 由此得知如果一个正规算子的特征值充分多，可以任意接近它的范数,但没有一个特征值的模大到等于范数,则它的数值值域将不是闭的. 具体的例：这样的对角算子，其对角项的模不能到达其上确界. 沿着稍为不同的方向的另一个例子：取A为具有对角线$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$的对角算子：由于$A\geqslant 0$且$\ker A=\{0\}$，得知$0\notin W(A)$；事实上$W(A)=(0, 1]$. 这顺便地也指明了即使对紧算子说,数值值域也可能不是闭的.

(2) 取A为单侧移位. 由于开单位圆域中每一数是A^*的特征值，得知开单位圆域包含于$W(A^*)$中. 由于$W(A^*)$恒与$(W(A))^*$相同(证：$(A^*f, f)=(Af, f)^*$)，得知开单位圆域包含于$W(A)$中. 最后由于A没有特征值，上面证明的定理蕴涵$W(A)$不能含有任何模1的数,因此$W(A)$等于开单位圆域.

解 169. 如果λ属于A的压缩谱，则λ^*是A^*的一个特征值. 因此$\lambda^*\in W(A^*)$,所以$\lambda\in W(A)$. 结论：数值值域包含压缩谱.

如果λ属于A的近似点谱，则存在单位矢量f_n使得$(A-\lambda)f_n\to 0$. 由于

$$|(Af_n, f_n)-\lambda|=|((A-\lambda)f_n, f_n)|\leqslant\|(A-\lambda)f_n\|,$$

得知$(Af_n, f_n)\to\lambda$. 结论：数值值域的闭包包含近似点谱.

这两段完成了本题的证明. 把刚才证明的关于近似点谱的事实与下面的其它两点事实结合起来就得到一个稍微不同的证法;

这两点就是：谱的边界包含于近似点谱中以及数值值域是凸集.

解 170. 如果 V 是 Volterra 积分算子而 $A=1-(1+V)^{-1}$ $(=V(1+V)^{-1})$，则 A 是拟幂零的，但 $W(A)$ 不含有 0.

证. 由于 A 的拟幂零性是显然的(问题 146)，只须证明如果 f 是使得 $(Af,f)=0$ 的矢量，则 $f=0$. 的确，$(Af,f)=0$，则

$$\|f\|^2=((1+V)^{-1}f,f)\leqslant\|(1+V)^{-1}\|\cdot\|f\|^2=\|f\|^2.$$

(参看解 150. 考虑 $(1+V)^{-1}$ 这个窍门不仅在此处有用.) 由此得知(根据熟知的当 Schwarz 不等式退化时的结果) f 必须是 $(1+V)^{-1}$ 的一个特征矢. 由于 $\Lambda((1+V)^{-1})=\{1\}$，得知 $(1+V)^{-1}f=f$，或 $f=(1+V)f$，或 $Vf=0$. 这蕴涵 $f=0$(参看问题 148)；证完.

请注意算子 A 是紧的.

解 171. 假设 A 是一个正规算子. 由于 $\overline{W(A)}$ 是凸的且 $\Lambda(A)\subset\overline{W(A)}$(问题 166 和 169)，得知 $\operatorname{conv}\Lambda(A)\subset\overline{W(A)}$. 剩下只要证明反向的不等式. 考虑到用半平面表达的凸包的特征，所希望的结果可以用以下方式表述：如果一个闭半平面包含 $\Lambda(A)$，它也将包含 $W(A)$. 如果把 A 换成 $\alpha A+\beta$(这里的 α 和 β 表示复数)，则 Λ 和 W 将分别换成 $\alpha\Lambda+\beta$ 和 $\alpha W+\beta$. 这个评注使我们有可能使问题"规范化". 其效果是把问题约化到只须研究某一特殊的半平面，例如右半平面. 所期望的结果现在就是：如果 A 的谱中每一数都有正的 $(\geqslant 0)$ 实部，则 A 的数值值域也是如此.(请注意，约化到这一步的过程中没有用到正规性，正规的假定在证明这个约化了的陈述时才用上了.)

利用谱定理可以接受 A 是一个具有测度 μ 的测度空间上的有界可测函数 φ 诱导出的乘法的假定. 如果 $f\in\mathbf{L}^2(\mu)$，则 $(Af,f)=\int\varphi|f|^2d\mu$. 依据这些，约化了的陈述所说的是，如果几乎处处有 $0\leqslant\operatorname{Re}\varphi$ (这说明 φ 的本性值域包含于右半平面)，则 $0\leqslant\operatorname{Re}\int\varphi|f|^2d\mu=\int(\operatorname{Re}\varphi)|f|^2d\mu$. 最后，这是显然的；如果 $d\nu=$

$|f|^2d\mu$, 则 ν 是一个正测度，而上述断语说的正是：正函数关于正测度的积分是正的。

解 172. 次正规算子的数值值域的闭包是它的谱的凸包。

证. 如果 A 是次正规的而 B 是它的极小正规扩张(参看问题155)，则 $\Lambda(B)\subset\Lambda(A)$ (问题157)，又，显而易见，$W(A)\subset W(B)$. 由此得知

$$\begin{aligned}\overline{W(B)}&=\operatorname{conv}\Lambda(B)\ (\text{问题 }171)\\&\subset\operatorname{conv}\Lambda(A)\\&\subset\overline{W(A)}\ \ (\text{问题 }166\text{ 和 }169)\\&\subset\overline{W(B)},\end{aligned}$$

从而式中前后各集都是相等的。

作为证明的推论，注意次正规算子的数值值域的闭包同于它的极小正规扩张的数值值域的闭包。

解 173. (a) 如果 A 不可逆，则 $0\in\Lambda(A)$，因此 $1\in\Lambda(1-A)$；由此得知 $1\leqslant r(1-A)\leqslant w(1-A)$. (b) 无损于普遍性，假定 $\|A\|=1$(乘以一个适宜的正常数). 假设条件 $w(A)=\|A\|$ 于是保证存在一个单位矢的序列 $\{f_n\}$ 使得 $|(Af_n, f_n)|\to 1$；无损于普遍性，假定$(Af_n, f_n)\to 1$ (乘以一个适宜的模为 1 的常数). 由于 $|(Af_n, f_n)|\leqslant\|Af_n\|\leqslant 1$ 而$(Af_n, f_n)\to 1$，得知 $\|Af_n\|\to 1$. 这蕴涵

$$\|Af_n-f_n\|^2=\|Af_n\|^2-2\operatorname{Re}(Af_n, f_n)+1\to 0,$$

因此 1 是 A 的近似特征值，所以 $r(A)$ 必须等于 1.

解 174. 存在着凸型但不是正规型的算子，反过来也是如此。

证. 记
$$M=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

并令 N 表示一个以圆心在 0，半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭圆域 D 为谱的正规算子. 如果

$$A=\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & N\end{pmatrix},$$

则 $\Lambda(A)=\{0\}\cup D=D$, 又 $W(A)=\operatorname{conv}(W(M)\cup W(N))=D$. 这指明 A 是凸型的. 由于 $\|A\|=1$ (事实上 $\|M\|=1$), A 不是正规型的.

其次,记
$$A=\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由于 $\|A\|=1$, 且 $W(A)=\operatorname{conv}(D\cup\{1\})$, 得知 $w(A)=1$, 从而 A 是正规型的. 可是, 由于 $\Lambda(A)=\{0\}\cup\{1\}$, 因此 $\operatorname{conv}\Lambda(A)$ 是闭单位区间, A 不是凸型的.

这些概念中有许多是 Wintner [1929] 首先研究的. 该篇论文有些小错误; 它断言每一个正规型算子是凸型的.

解 175. 函数 $\overline{W}$ 关于一致(范数)拓扑连续; 如果基础希耳伯特空间是无穷维的, 则函数 w 关于强拓扑(从而关于弱拓扑)不连续.

证. 如果 $\|A-B\|<\varepsilon$, 又 f 是一个单位矢, 则
$$|((A-B)f, f)|<\varepsilon,$$
所以 $(Af, f)=(Bf, f)+((A-B)f, f)\in W(B)+(\varepsilon)$.

由此得知 $W(A)\subset W(B)+(\varepsilon)$; 对称地, $W(B)\subset W(A)+(\varepsilon)$. 这就证明了第一个断语. (这个证明属于 A. Brown.)

至于第二个断语, 可考虑单侧移位 U. 在强拓扑中, 序列 $\{U^{*n}\}$ 趋于 0 (当 n 增大时, 越来越多的富里叶系数消失掉了), 但是 $w(U^{*n})=1$ 对一切 n 成立.

解 176. 如果 a 是一个复数, $|a|\leqslant 1$, 又 $|z|<1$, 则 $\operatorname{Re}(1-za)=1-\operatorname{Re}(za)\geqslant 1-|z|>0$. 反之, 如果复数 a 使得对每一 z, $|z|<1$, 有 $\operatorname{Re}(1-za)\geqslant 0$ 成立, 则特别当 $za=t|a|, 0<t<1$ 时, 这是成立的; 由于, 因此有 $1-t|a|=\operatorname{Re}(1-t|a|)\geqslant 0$, 得知(令 t 趋于 1) $|a|\leqslant 1$.

与这个数值的事实相对应(并且被它所蕴涵)的算子的事实是

$w(A)\leqslant 1$ 当且只当 $\operatorname{Re}(1-zA)\geqslant 0$. 的确，下列的关于 A 的断语两两等价：

$$w(A)\leqslant 1,$$

$$|(Af, f)|\leqslant 1 \text{ 每当 } \|f\|=1,$$

$$(\operatorname{Re}(1-zA)f, f)\geqslant 0 \text{ 每当 } \|f\|=1 \text{ 且 } |z|<1.$$

如果 $w(A)\leqslant 1$，则 $r(A)\leqslant 1$，所以当 $|z|<1$ 时 $1-zA$ 是可逆的. 由于可逆算子有正实部当且只当其逆算子有正实部（如果 B 可逆，则 $(B^{-1}f, f)=(B^{-1}f, BB^{-1}f)=(B(B^{-1}f), (B^{-1}f))^*$）得知 $w(A)\leqslant 1$ 当且只当在单位圆域内有 $\operatorname{Re}(1-zA)^{-1}\geqslant 0$.

其次试考察，如果 n 是一个正整数又 ω 是 1 的一个 n 次元根（即 n 是使得 $\omega^n=1$ 的最小正整数），则对于不是 ω 的幂的一切 z 有

$$\frac{1}{1-z^n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\omega^k z}.$$

这个等式的右边事实上是左边的部分分式展开式. 要直接验证它，试通乘以 $1-z^n$，并注意到右边变成一个至多 $n-1$ 次的多项式，这个多项式在 n 个代换 $z\to\omega^k z$ $(k=0, \cdots, n-1)$ 中的每一变换下是不变的，因此必等于常数，然后置 z 等于 0 便可算出该常数.

前段的等式蕴涵如果 $w(A)\leqslant 1$，则当 $z\leqslant 1$ 时，

$$(1-z^n A^n)^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1-\omega^k zA)^{-1}.$$

由于右边的每一加项有正实部（因为 $w(\omega^k A)\leqslant 1$），得知左边有正实部，而这又蕴涵 $w(A^n)\leqslant 1$.

证明中有一个步骤可能是（读者）不够熟悉的，须再行考察；即通过代入法，从一个有理函数间的恒等式证明算子间的恒等式是利用有理函数的函数演算（参看问题 97）. 明显地说：如果 φ_1 和 φ_2 是极点不在 A 的谱中的有理函数，因而 $\varphi_1(A)$ 和 $\varphi_2(A)$ 有意义，则 φ_1 和 φ_2 的每一多项式 p 也是如此；如果 $\varphi(\lambda)=p(\varphi_1(\lambda),$

$\varphi_2(\lambda))$，则 $\varphi(A)=p(\varphi_1(A),\ \varphi_2(A))$. 证明是显然的.

$w(A)\leqslant 1$ 和 $|z|<1$ 时 $\mathrm{Re}(1-zA)^{-1}\geqslant 0$ 的等价性是初等的，但对以上的论证说是基础性的；这是 Berger 的主要的新想法. 这个想法在所有后继的证明中都可以在某种形式下见到. 上面所给证明是 Pearcy [1966] 所发现的简化的一个简化.

第十八章 酉 膨 胀

解 177. (a) 作为证明的一个启发性的引导，考虑给定的希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 是一维实欧几里得空间而膨胀空间 $\mathbf{K}$ 是平面的特例. 这时，给定的压缩算子 A 是一个倍乘 $\alpha(|\alpha|\leqslant 1)$，而用几何术语说，题中断语就是，(直线上的)用 α 乘的乘法可以经由(平面中的)一个适当的旋转，跟着作一个投影(返回直线上)来完成. 画一个图就会使这一切明澈如镜；简单的解析几何表明该旋转的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{1-\alpha^2} \\ \sqrt{1-\alpha^2} & -\alpha \end{pmatrix}.$$

证明本身就是应用于平面的技巧的可能的最直接的仿制品. 需要进行几次试验以判定角色 α^2 究竟应由 A^2，或 AA^*，或 A^*A，或是有时由这个，有时又由那个来充当. 结果可以如下描述. 给定 $\mathbf{H}$，记 $\mathbf{K}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ 并把 $\mathbf{H}$ 与第一加项等同起来；则 $\mathbf{K}$ 上每一算子是 $\mathbf{H}$ 上算子的二行矩阵，而且特别有

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

给定 A，记 $\quad S=\sqrt{1-AA^*} \quad$ 和 $\quad T=\sqrt{1-A^*A}$，

其中根号自然表示正的平方根；注意由于 $\|A\|\leqslant 1$，得知 $1-AA^*$ 和 $1-A^*A$ 都是正的，所期望的膨胀 B 可以由

$$B=\begin{pmatrix} A & S \\ T & -A^* \end{pmatrix}$$

定义．B 是 A 的膨胀是明显的．由于

$$B^*=\begin{pmatrix} A^* & T \\ S & -A \end{pmatrix},$$

由直接计算得知

$$B^*B=\begin{pmatrix} A^*A+T^2 & A^*S-TA^* \\ SA-AT & S^2+AA^* \end{pmatrix},$$

$$BB^*=\begin{pmatrix} AA^*+S^2 & AT-SA \\ TA^*-A^*S & T^2+A^*A \end{pmatrix}.$$

剩下只须证明 $AT=SA$. 显而易见，有 $AT^2=S^2A$，而由归纳法知，对 $n=0, 1, 2, \cdots$，有 $AT^{2n}=S^{2n}A$. 这蕴涵对每一个多项式 p 有 $Ap(T^2)=p(S^2)A$，从而 $AT=SA$，如所期望(参看解 108)．

(b) 证明与(a)的证明相似，且简单．给定 A, $0\leqslant A\leqslant 1$，令 R 表示 $A(1-A)$ 的正平方根，并记

$$B=\begin{pmatrix} A & R \\ R & 1-A \end{pmatrix}.$$

验证 B 是一个投影毫无困难．(结果(b)属于 E. A. Michael; 参看 Halmos[1950a].)

解 178. 证明是构造性的．给定 $\mathbf{H}$，令 $\mathbf{K}$ 表示以所有整数(正，负，零)为下标的可数无穷多个 $\mathbf{H}$ 的摹本的直接和，则 $\mathbf{K}$ 上的每一算子是一个无穷算子矩阵，而且，特别是，自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的投影 P 由

$$P=\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & (1) & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

给出(括号表示该元素是在 $\langle 0, 0\rangle$ 的位置)．给定 A，置

$$B=\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \iddots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & S & (A) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -A^* & T & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \iddots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

这里的 S 和 T 如同解 177 中所示. 由于 B 是三角的,其诸幂也是三角的,且诸幂的对角元素就是 B 的对角元素的对应幂. 这就使 B 是 A 的幂膨胀成为显然的. B 是酉算子的证明是通过一个显然的计算(它用到解 177 的结果).

虽然这可能不是本定理的最富于启示性的证明, 可是它必定是最短的; 它属于 Schäffer[1955].

解 179. 本定理可以直接证明, 但通过酉算子和膨胀理论的证明有其难于超过的优点. 至于只限于酉算子的定理, 它可以用相对地初等而且可以广泛推广的几何方法证明 (参看 Halmos [1958, p. 185]), 但较偏狭的通过谱定理的希耳伯特空间的证明, 思路更为明澈.

如果 U 是 $\mathbf{H}$ 上的酉算子,则谱定理认可了下述假定, 即在某一适宜的测度空间上, 对某一测度 μ, $\mathbf{H}=\mathbf{L}^2(\mu)$, 而且 U 是由一个几乎处处有常数模 1 的可测函数 φ 诱导的乘法. 如果 $f\in\mathbf{H}$ $(=\mathbf{L}^2(\mu))$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi^j\right)f.$$

由于几乎处处有 $|\varphi|=1$, 得知

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi^j\right|\leqslant 1$$

几乎处处成立. 由于, $|\varphi|=1$ 几乎处处成立的假定还蕴涵平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi^j$$

构成一个几乎处处收敛序列（其极限是使 $\varphi=1$ 成立的点全体的集的特征函数），得知勒贝格控制收敛定理(不一定用有界收敛定理)可以应用于序列

$$\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi^j\right)f\right\}.$$

这完成了收敛性的证明，稍假思索就能进而揭示极限是什么.

如果 A 是 $\mathbf{H}$ 上任意一个压缩算子，则令 U 表示它的到一个希耳伯特空间(譬如说 $\mathbf{K}$)上的酉幂膨胀，并令 P 表示自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 上的投影．这意味着如果 $f\in\mathbf{H}$，则 $A^nf=PU^nf$, $n=0, 1, 2, \cdots$，而由此知

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}A^jf=P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}U^jf\right).$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}U^jf$$

当 $n\to\infty$ 时对每一 f 有一极限，又由于 P 是连续的(即有界的)，得知

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}A^jf$$

当 $n\to\infty$ 时对每一 f 有一极限.

关于酉算子的平均遍历定理首先被 von Neumann[1932] 证明．推广到压缩算子的工作属于 Riesz-Nagy[1943]；应用膨胀理论的证明属于 Nagy[1955]．关于一般的遍历定理的一个较好的近期的参考文献是 Jacobs[1960].

解 180. 可以给出解析的证明，但那是比较困难的；应用膨胀理论则一切变成简单的 (Nagy[1955])．已给 $\mathbf{H}$ 上的 A，令 $\mathbf{K}$ 上的 U 表示它的一个酉幂膨胀，并令 P 表示自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的投影．如果 p 是一个多项式而 f 属于 $\mathbf{H}$，则

$$\begin{aligned}\|p(A)f\|&=\|Pp(U)f\| \quad \text{(据幂膨胀的定义)}\\&\leqslant\|p(U)\|\cdot\|f\| \quad \text{(因为 } \|P\|=1\text{)}\\&\leqslant\|p\|_D\cdot\|f\| \quad \text{(因为 } U \text{ 是正规的)},\end{aligned}$$

且由此得知，如问题所述，$\|p(A)\|\leqslant\|p\|_D$.

解 181. 令 $\mathbf{H}_0$ 表示 $\mathbf{H}$ 中有限非 0 矢量序列全体所成的线性空间(具逐坐标的线性运算)，并令 $\mathbf{K}_0$ 表示形如 $\{u_n: n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 的序列全体所成的线性空间，这里的

$$u_j=\sum_i A_{i-j}f_i$$

对 $\mathbf{H}_0$ 中的某一序列 $\{f_n: n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 成立($\mathbf{K}_0$ 也具有逐坐标的线性运算). 如果 $u=\{u_n\}$ 和 $v=\{v_n\}$ 属于 $\mathbf{K}_0$, $u_j=\sum_i A_{i-j}f_i$ 而 $v_j=\sum_i A_{i-j}g_i$, 记

$$[u, v]=\sum_j(u_j, g_j).$$

这个定义看来象是有歧义的，因为它象是依赖于 v 怎样用 $\mathbf{H}_0$ 的元素来表示. 可是，由于

$$\sum_j(u_j, g_j)=\sum_i\sum_j(A_{i-j}f_i, g_j)=\sum_i\sum_j(f_i, A_{j-i}g_j)=\sum_i(f_i, v_i),$$

可见上述依赖性是个错觉. 这个定义产生了 $\mathbf{K}_0$ 的一个内积. 一次半性和共轭对称性是显然的，正定性可从 $\{A_n\}$ 的正定性假定推得，只剩下严格正定性还得稍费踌躇，但这也是容易的. 据(不一定严格正的)内积的 Schwarz 不等式，

$$|[u, v]|^2\leqslant[u, u]\cdot[v, v].$$

由此得知如果 $[u, u]=0$，则对 $\mathbf{K}_0$ 中的一切 v 有 $[u, v]=0$. 把下标 i 固定下来，选 $\{g_n\}$ 使得 $g_i=u_i$ 而对 $n\neq i$, $g_n=0$，可推出

$$\|u_i\|^2=(u_i, g_i)=\sum_j(u_j, g_j)=[u, v]=0,$$

从而得出 $u=0$ 的结论.

具有这样得到的内积的线性空间 $\mathbf{K}_0$ 可能不是完备的；令 $\mathbf{K}$ 表示它的完备化. $\mathbf{H}$ 的每一元素 f 对应着 $\mathbf{H}_0$ 中的一个序列 $\{f_n\}$, $\{f_n\}$ 由 $f_0=f$ 而 $n\neq0$ 时 $f_n=0$ 来定义. 这个序列 $\{f_n\}$ 接着又对应着 $\mathbf{K}_0$ 中的序列 $\{u_n\}$，而

$$u_j=\sum_i A_{i-j}f_i=A_{-j}f.$$

如果 f 和 g 在 $\mathbf{H}$ 中，对应于 $\mathbf{K}$ 中的序列 $u=\{u_n\}$ 和 $v=\{v_n\}$，则

上面各定义蕴涵

$$[u,\ v]=(f,\ g).$$

由此知映射 $f\to u$ 是 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{K}$ 中的一个等距嵌入；在证明的以下部分中将把 $\mathbf{H}$ 与其在 $\mathbf{K}$ 中的象等同起来.

如果 P 是自 $\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{H}$ 的投影，如果 $u=\{u_n\}$ 是 $\mathbf{K}_0$ 的一个元素，又如果 $g\in\mathbf{H}$，则

$$[Pu,\ g]=[u,\ g]=(u_0,\ g).$$

所以对一切这样的 u，有

$$Pu=u_0.$$

如果 $u=\{u_n\}$ 属于 $\mathbf{K}_0$，记 $Uu=v=\{v_n\}$，这里的 $v_n=u_{n-1}$. 如果 $u_j=\sum_i A_{i-j}f_i$，其中的 $\{f_n\}$ 属于 $\mathbf{H}_0$，则

$$v_j=u_{j-1}=\sum_i A_{i-(j-1)}f_i=\sum_i A_{i-j}f_{i-1}.$$

这蕴涵 U 不但是一个一对一线性变换，并且把 $\mathbf{K}_0$ 映射到本身上. 如果 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是 $\mathbf{H}_0$ 中任意两个序列，又如果 $u=\{u_n\}$ 和 $v=\{v_n\}$ 是它们在 $\mathbf{K}_0$ 中的对应元，则

$$[Uu,\ Uv]=\sum_j(u_{j-1},\ g_{j-1})=\sum_j(u_j,\ g_j)=[u,\ v],$$

因此 U 是一个等距算子. 由此得知 U 可以唯一地扩张成 $\mathbf{K}$ 上的酉算子（这个算子可以同样地用记号 U 表示）. 由于 $PU^n u=(U^n u)_0=u_{-n}=\sum_i A_{i+n}f_i$，得知如果 $f\in\mathbf{H}$，则

$$PU^n f=A_n f,$$

证完.

第十九章　算子的换位子

解 182.　Wintner 的证明　如果 $PQ-QP=\alpha$，把 P 换成 $P+\lambda$，这里的 λ 是一个任意的数量，并且注意到新的 P 适合同样的可交换性关系. 因此假定 P 是可逆的不会损害普遍性. 由于此时，$QP=P^{-1}(PQ)P$，所以 $\Lambda(QP)=\Lambda(PQ)$，关系 $PQ=QP+\alpha$

蕴涵

$$\Lambda(PQ)=\Lambda(QP+\alpha)=\Lambda(QP)+\alpha=\Lambda(PQ)+\alpha.$$

能够使一个复平面的非空紧子集（如同 $\Lambda(PQ)$ 之类）保持不变的唯一的平移是平凡平移(即根本没有平移)；换句话说，α 必须是 0.

Wielandt 的证明. 如果 $PQ-QP=\alpha$，则

$$P^2Q-QP^2=P^2Q-PQP+PQP-QP^2$$
$$=P(PQ-QP)+(PQ-QP)P=2P\alpha,$$

而更一般地有(归纳法)

$$P^nQ-QP^n=nP^{n-1}\alpha,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

如果 P 是幂零的，例如是指数 n 的，则 $nP^{n-1}\alpha=0$，所以 $\alpha=0$. 如果 P 不是幂零的，则不等式

$$n\|P^{n-1}\|\cdot|\alpha|\leqslant 2\|P\|\cdot\|Q\|\cdot\|P^{n-1}\|$$

对 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 成立，这蕴涵

$$n|\alpha|\leqslant 2\|P\|\cdot\|Q\|,$$

从而又有 $\alpha=0$.

解 183. 给定希耳伯特空间 $\mathbf{H}$，令 $\mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{H}$ 中矢量的有界序列 $f=\langle f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots\rangle$ 全体构成的线性赋范空间（逐坐标的线性运算，上确界范数），令 $\mathbf{N}$ 表示 $\mathbf{B}$ 中零序列(即适合 $\lim n\|f_n\|=0$ 的序列 f) 全体所成的子空间. 商空间 $\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{B}/\mathbf{N}$ 是一个线性赋范空间. 每一个 $\mathbf{H}$ 上算子的有界序列 $A=\langle A_1,\ A_2,\ A_3,\cdots\rangle$ 在 $\mathbf{B}$ 上诱导一个算子；$\langle f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots\rangle$ 在 $\langle A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots\rangle$ 下的象是 $\langle A_1f_1,\ A_2f_2,\ A_3f_3,\ \cdots\rangle$. 由于子空间 $\mathbf{N}$ 在每一个这样的诱导算子下不变，序列 A，依一种自然的方式，也诱导一个 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的算子；称之为 $\hat{A}$. $\mathbf{H}$ 上算子的有界序列形成一个赋范代数（逐坐标的线性运算，上确界范数）. 从这样的有界序列到 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的算子的对应 $A\rightarrow\hat{A}$ 是一个减范的同态. 如果 $P=\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\rangle$ 和 $Q=\langle Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \cdots\rangle$ 使 $P_nQ_n-Q_nP_n\rightarrow C$，则 $\hat{P}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{P}$ 是 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的换位子；由于这个换位子不能等于 $\hat{\mathbf{I}}$(= $\hat{\mathbf{B}}$ 上的恒等算子)，证完.

解 184. 固定 P 并把 $C=\Delta Q=PQ-QP$ 看作 Q 的函数. 运算 Δ 显然是算子的线性空间上的线性变换；由于

$$\|\Delta Q\| = \|PQ - QP\| \leqslant 2\|P\| \cdot \|Q\|,$$

该线性变换(在算子的巴拿哈空间上)是有界的,且

$$\|\Delta\| \leqslant 2\|P\|.$$

象 Δ 这样的映射常有重要的代数上的作用. Δ 的最重要的性质是它是一个导运算,这就是说,它满足

$$\Delta(QR) = \Delta Q \cdot R + Q \cdot \Delta R.$$

证: $PQR - QRP = (PQR - QPR) + (QPR - QRP)$.

导运算具有微分法的代数性质中的许多性质,但是正如从定义本身所能看出的那样,它们是在一种不可交换的方式下具有这些性质. 这些性质中,首先是若干因子的积的"微分"法的莱不尼兹公式的有效性. 该断语是,$\Delta(Q_1 \cdots Q_n)$ 是 n 个项的和;要得到其中的第 j 项,只要把积 $Q_1 \cdots Q_n$ 中的 Q_j 换成 ΔQ_j. 证明是一个显然的归纳法. 对 $n=1$,不须证明什么;从 n 到 $n+1$ 的步骤,只要把 $Q_1 \cdots Q_{n+1}$ 写成 $(Q_1 \cdots Q_n)Q_{n+1}$ 并应用前给的(两因子)的乘积公式. 这结果当然适用于所有 Q_j 都相同的特殊情形,但这时该公式并不见得更便于思考.

在题设条件下导运算 Δ 的一个特殊性质是 $\Delta^2 Q = 0$. 这里的 Δ^2 当然是 Δ 与其自身的复合,因此

$$\Delta^2 Q = \Delta(\Delta Q) = P \cdot \Delta Q - \Delta Q \cdot P;$$

$\Delta^2 Q$ 等于 0 正好表达了 ΔQ 与 P 可交换.

莱不尼兹公式和 $\Delta^2 Q$ 等于 0 使得我们易于计算 Q 的高次幂的高阶导数. 程序从 $\Delta(Q^n)$ 开始:它等于 n 个可能的乘积的和,每个乘积有一个等于 ΔQ 的因子和 $n-1$ 个等于 Q 的因子. 当把 Δ 作用于这些加项中的每一项时,结果只是 $n-1$ 个乘积的和(理由:Δ 作用于 ΔQ 时,结果是 0). 所得到的这 $n-1$ 个乘积各有两个等于 ΔQ 的因子和 $n-2$ 个等于 Q 的因子. 推论:$\Delta^2(Q^n)$ 等于 $n(n-1)$ 个可能的这类乘积的和. 论证平淡无奇地循此进行下去可得到 $\Delta^k Q^n$ 的描述. 当 $k=n$,结果是 $\Delta^n Q^n$ 是 $n!$ 个项的和,各项都是 $(\Delta Q)^n$;换句话说,

$$\Delta^n Q^n = n!(\Delta Q)^n.$$

最后的方程是本证明的关键；所期望的结果就是它的一个显易的推论．的确，由于

$$\|(\Delta Q)^n\|=\frac{1}{n!}\|\Delta^n Q^n\|\leqslant\frac{1}{n!}\|\Delta^n\|\cdot\|Q^n\|\leqslant\frac{1}{n!}\|\Delta\|^n\cdot\|Q\|^n,$$

得知
$$\|(\Delta Q)^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\|\Delta\|\cdot\|Q\|,$$

从而 ΔQ 是拟幂零的．

把 $\Delta^n Q^n$ 的方程作为被除式可得到 Jacobson 的原始的代数结果的一个证明．陈述：如果特征大于 $n!$ 的域上的代数的一个元素 Q 适合一个 n 次多项式方程，又 Δ 是该代数的一个使得 $\Delta^2 Q=0$ 的导运算，则 ΔQ 是幂零的，幂零指数 n．证明：从 $\Delta(\Delta Q)=0$ 推断对每一个正整数 k，$\Delta(\Delta Q)^k=0$，从而从 $\Delta^n Q^n$ 的方程推断 $\Delta^{n+1}Q^n=0$．推论：当 $n>i$ 时恒有 $\Delta^n Q^i=0$．如果 $Q^n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i Q^i$ 是 Q 所满足的多项式方程，则由此可推知 $\Delta^n Q^n=0$，从而再由 $\Delta^n Q^n$ 的方程得知 $n!(\Delta Q)^n=0$．从关于特征的假定即得所要求的结论．

解 185．(a) 窍门在于把幂的"导数"的公式推广到非可交换的情形；参看解 182 和 184．利用在这里最方便的记号来表示，这个推广就是

$$P^n Q-Q^n P=\sum_{i=0}^{n-1}P^{n-i-1}CP^i;$$

证明是一个直捷的归纳法．由此知

$$P^n Q-QP^n=nP^{n-1}-\sum_{i=0}^{n-1}P^{n-i-1}(1-C)P^i,$$

从而有

$$n\|P^{n-1}\|\leqslant 2\|P\|\cdot\|Q\|\cdot\|P^{n-1}\|+\|1-C\|\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\|P^{n-i-1}\|\cdot\|P^i\|.$$

到此为止，允许 P 是任意的算子．由于已经假定 P 是亚正规的，最后写出的那个和数应等于 $n\|P^{n-1}\|$（参看问题 162）．通除以 $n\|P^{n-1}\|$（如果 $P=0$，一切是显而易见的，而如果 $P\neq 0$，则 $P^{n-1}\neq 0$）．结果是

$$1\leqslant\frac{2}{n}\|P\|\cdot\|Q\|+\|1-C\|,$$

由此即得结论.

(b) 如 $\|1-C\|<1$ 则 C 可逆；由于据 Kleinecke-Shirokov 定理，C 是拟幂零的，因此那是不可能的.

解 186. 如果 A 有一个大核，则该核是具有相同维数的 $\aleph_0$ 个子空间的直接和. 核的正交补可以是大的或不是大的. 可是如果把核的一个直和加项添加到该正交补，结果就把基础希耳伯特空间表示成直接和 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}\oplus\cdots$ 的形式且第二项以后各加项的直接和被 A 变成 0. 如果与空间的这个表示法相对应，算子 A 也表示成一个矩阵，这个矩阵的形式将是

$$A=\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & \\ A_2 & 0 & 0 & 0 & \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

其中各 A_n(和各个 0)是 $\mathbf{H}$ 上的算子. 记

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

和

$$Q=\begin{pmatrix} A_1 & -A_0 & 0 & 0 & \\ A_2 & 0 & -A_0 & 0 & \\ A_3 & 0 & 0 & -A_0 & \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix};$$

则 P 和 Q 是算子且(直捷的计算) $PQ-QP=A$. 主断语证完.

为了证明系 1，可设 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 是无穷维希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 的矢量的一个有限集，令 $\mathbf{M}$ 表示它们的张成空间. 如果 A 是 $\mathbf{H}$ 上的一个算子，令 C 表示在 $\mathbf{M}$ 上等于 A 而在 $\mathbf{M}^\perp$ 上等于 0 的算

子；据刚才所证明的，C 是一个换位子，且在每一个 f_i, $i=1, \cdots, n$, C 与 A 相等．这蕴涵 A 的每一个基强邻域含有换位子．

系 2 的证明也与此相似．给定 $\mathbf{H}$，令 $\mathbf{M}$ 表示一个具有大正交补的大子空间；给定 A，按前段定义 C，而记 $B=A-C$．由于 $A=B+C$ 且 B 和 C 都是换位子，证完．

解 187． 由于 A 不是倍乘算子，存在矢量 f 使得 f 和 Af 线性无关．令 T 表示一个使得 $Tf=f$ 且 $TAf=-Af$ 的可逆算子．由于这蕴涵着 $(A+T^{-1}AT)f=Af-Af=0$，得知直接和

$$S=(A+T^{-1}AT)\oplus(A+T^{-1}AT)\oplus(A+T^{-1}AT)\oplus\cdots$$

有一个大核．（实际只推知该核是无穷维的；由于全空间是可分的，这蕴涵核是大的．）据问题 186，直接和 S 是一个换位子．如果

$$B=A\oplus A\oplus A\oplus\cdots$$

且
$$C=T^{-1}AT\oplus T^{-1}AT\oplus T^{-1}AT\oplus\cdots,$$

则
$$S=B+C.$$

接着的一步是下述有些令人惊讶的引理．当 B 和 C 是使得 $B+C$ 是换位子的算子，则 $B\oplus C$ 是一个换位子．我们的证明是从初等代数得到一点灵感．如果 $B+C=PQ-QP$，则记 $R=C+QP=PQ-B$，并计算

$$\begin{pmatrix}0 & P\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix}0 & R\\ Q & 0\end{pmatrix}$$

的换位子：

$$\begin{pmatrix}0 & P\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & R\\ Q & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & R\\ Q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & P\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}PQ & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}R & 0\\ 0 & QP\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}.$$

推论：$B\oplus C$ 是一个换位子，可是由于 C 明显地相似于 B，得知 $B\oplus B$ 是一个换位子；最后由于 $B\oplus B$ 酉等价于 B，证完．

解 188． 假设 $C=A^*A-AA^*\geqslant 0$．问题所要证明的是 $0\in\Lambda(C)$．只要证明存在单位矢的序列 $\{f_n\}$ 使得 $Cf_n\to 0$（即 $0\in\Pi(C)$）就够了．为此目的，在 A 的近似点谱中取一个复数 λ，对应

于这个 λ，求一个单位矢量序列 $\{f_n\}$ 使得 $(A-\lambda)f_n\to 0$. 由于 $A-\lambda$ 的自换位子等于 C，又由于 $C\geqslant 0$，得知

$$(A-\lambda)^*(A-\lambda)\geqslant(A-\lambda)(A-\lambda)^*.$$

由于 $(A-\lambda)f_n\to 0$，得知 $(A-\lambda)^*(A-\lambda)f_n\to 0$. 最后两点评注蕴涵 $(A-\lambda)(A-\lambda)^*f_n\to 0$. 由于因此 C 是两算子的差，这两算子各使 $\{f_n\}$ 映成趋于 0 的序列，所以算子 C 也是这样的.

解 189. (a) 证题计划是依次证明：(1) A 是拟正规的，(2) $\ker(1-A^*A)$ 约化 A，和(3) $\ker(1-A^*A)$ 的正交补包含于 $\ker(A^*A-AA^*)$.

(1) 记 $P=A^*A-AA^*$. 由于，对一切 f，

$$\begin{aligned}\|f\|^2\geqslant\|Af\|^2&=(A^*Af,f)=(AA^*f,f)+(Pf,f)\\&=\|A^*f\|^2+\|Pf\|^2,\end{aligned}$$

得知如果 $Pf=f$，则 $A^*Pf=0$（第一步用到范数条件）. 这蕴涵 $A^*P=0$，从而 $PA=0$，或等价地，$(A^*A)A=A(A^*A)$.

(2) 记 $\mathbf{M}=\ker(1-A^*A)$. 如果 $f\in\mathbf{M}$，则 $f-A^*Af=0$. 由此知 $Af-(A^*A)Af=Af-A(A^*A)f=A(f-A^*Af)=0$，因此 $\mathbf{M}$ 在 A 下不变. 同理(把以 Af 代 f 改为以 A^*f 代 f)，$\mathbf{M}$ 在 A^* 下不变(参看解 154).

(3) 由于 P 是幂等的，得知

$$A^*A-AA^*=A^*AA^*A-AA^*A^*A-A^*AAA^*+AA^*AA^*.$$

由于 A^*A 与 A 和 A^* 都可交换，这可以改写成

$$A^*A-AA^*=A^*A(A^*A-AA^*).$$

换句话说，
$$P=A^*AP,$$
或
$$(1-A^*A)P=0.$$
由此得知
$$\operatorname{ran}P\subset\mathbf{M},$$
或
$$\mathbf{M}^\perp\subset\ker P.$$

现在应用 A 是完全非正规的假定：这个假定说的是 $\ker P$ 不包含任何约化 A 的非零子空间. 结论：$\mathbf{M}^\perp=\{0\}$，而这意味着 A 是一个等距算子.

(b) 如果 A 是带权数 $\{\alpha_n\}$ 的双侧移位且 $\alpha_n=1$ 或 $\sqrt{2}$ 依

$n\leqslant 0$ 或 $n>0$，则 A 是完全非正规的且 A 的自换位子是一个投影。

证．A 的自换位子容易计算；算出来是一个一秩投影，其值域是 e_1 张成的子空间．A 的完全非正规性从问题 129 即得：根据该结果，A 是不可约的，从而是最完全非正规的了．

解 190．无穷维希耳伯特空间是 $\aleph_0$ 维的希耳伯特空间的直接和．因此要证明每一个模 1 的倍乘算子是一个换位子，只须证明在 $\aleph_0$ 维希耳伯特空间上，每一个模 1 的倍乘算子是两个酉算子的换位子(因子的酉特征保证了那可能是不可数的直接和的有界性)．在 $\aleph_0$ 维希耳伯特空间中必存在一个就范正交基 $\{e_n:n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$．已给 α，$|\alpha|=1$，令 P 表示由 $Pe_n=\alpha^n e_n$ 定义的对角算子，Q 表示双侧移位，$Qe_n=e_{n+1}$．P 和 Q 都是酉算子；直捷的计算证明 $PQP^{-1}Q^{-1}=\alpha$．

如果 $\alpha=PQP^{-1}Q^{-1}$，则 $|\alpha|=1$ 的证明是 Wintner 推理(解 182)的改写．由于 $PQ=\alpha QP$，得知 $\Lambda(PQ)=\alpha\Lambda(QP)$；可是由于 PQ 相似于 QP，知 $\Lambda(PQ)=\Lambda(QP)$，从而 $\Lambda(QP)=\alpha\Lambda(QP)$．由于 $\Lambda(QP)$ 是不同于 $\{0\}$ 的非空紧集(记住 QP 可逆)，又由于保持这样的集不动的唯一同位相似变换是一个旋转，即得求证的结果．

解 191．证明是解 190 的移植．第一步是利用问题 111 把给定的空间表示成 $\aleph_0$ 个子空间的直接和，这些子空间具有相同维数且都约化给定的酉算子 U．直接和分解的目的是把 U 表示成对角的算子矩阵，这矩阵的第 n 个对角线元素是(譬如说) U_n，$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$．

解 190 启示我们，利用对角算子和双侧移位的乘法换位子在这里也可以解决问题．为了避免写大的矩阵，再介绍一些记号．把给定的希耳伯特空间想象成某一固定的希耳伯特空间中矢量序列 $f=\{f_n: n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$(当然要满足通常的条件 $\sum_n \|f_n\|^2<\infty$)全体的集．

$$(Pf)_n=V_nf_n$$

定义一个典型的对角算子矩阵 P，而

$$(Qf)_n=f_{n-1}$$

定义双侧移位 Q. 换位子易于计算；结果是

$$(PQP^{-1}Q^{-1}f)_n=V_nV_{n-1}^{-1}f_n.$$

可以从方程组

$$U_n=V_nV_{n-1}^{-1}$$

解出诸 V 并表示成诸 U 的式. 例如置 V_0 等于 1，则

$$V_n=U_n\cdots U_1 \text{ 对 } n\geqslant 1,$$

且

$$V_{-(n+1)}=U_{-n}^{-1}\cdots U_0^{-1} \text{ 对 } n\geqslant 0.$$

诸 U 的酉特征蕴涵这些 V 给出的变换 P 是一个酉算子，而一切都已解决.

解 192. *在一个无穷维希耳伯特空间上，全线性群的换位子子群就是该全线性群本身.*

证. 求证的断语是说每一个可逆算子是有限个(个数不一定有界)乘法换位子的积. 事实是每一个可逆算子是两个换位子的积(Brown-Pearcy [1966]). 这个事实的证明要做很多工作，仅为了当前的目的不值得去做；现在只要证明每一个可逆算子是三个换位子的乘积就已足够，而这就容易多了.

给定任意的一个无穷维希耳伯特空间上的任意的一个可逆算子 A，考虑无穷算子矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\ddots & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & (0) & A & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots\end{pmatrix}$$

和

$$Q=\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & (0) & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

常规的计算证明了

$$PQP^{-1}Q^{-1}=\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & (A) & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

把这些矩阵作用着的直接和(空间)看作带下标 0 的加项和其它诸加项的直接和，再把其它诸加项的直接和等同于其中一个加项．明显地改变一些记号后，上面计算的结果就变成：形如

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

的每一个算子矩阵是一个乘法换位子(只须设这两矩阵的诸元素作用在无穷维空间上且 A 是可逆的)．

无穷维希耳伯特空间上每一个可逆正规算子具有有大的正交补的大的约化子空间(问题 111)，所以它们可以表示成上述形式的两个矩阵的积．推论：每一个可逆正规算子是两个换位子的积．由于每一个可逆算子是一个酉算子与一个可逆正算子的积(极分

解)，得知，如前所陈述，每一个可逆算子是三个乘法换位子的积(应用问题 191 处理酉算子的因子).

第二十章 Toeplitz 算子

解 193. 如果 $\varphi=\sum_n \alpha_n e_n$，则 L_φ 的矩阵元素由下式给出:

$$\lambda_{ij}=(L_\varphi e_j,\ e_i)=(\sum_n \alpha_n e_{n+j},\ e_i)=\sum_n \alpha_n \delta_{n+j,i}=\alpha_{i-j}.$$

反之，如果 A 是 $\mathbf{L}^2$ 上使得对一切 i 和 j 有

$$(Ae_{j+1},\ e_{i+1})=(Ae_j,\ e_i)$$

的一个算子，又 W 是双侧移位(乘以 e_1 的乘法)，则

$$\begin{aligned}(AWe_j,\ e_i)&=(Ae_{j+1},\ e_i)=(Ae_j,\ e_{i-1})\\&=(Ae_j,\ W^*e_i)=(WAe_j,\ e_i).\end{aligned}$$

这蕴涵 A 与 W 可交换，从而(问题 115) A 是一个乘法.

解 194. 必要性的证明是一个简单的计算：如果 $i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，则

$$\begin{aligned}(T_\varphi e_j,\ e_i)&=(PL_\varphi e_j,\ e_i)=(L_\varphi e_j,\ e_i)=(L_\varphi e_{j+1},\ e_{i+1})\\&=(PL_\varphi e_{j+1},\ e_{i+1})=(T_\varphi e_{j+1},\ e_{i+1}).\end{aligned}$$

为了证明充分性，假定 A 是 $\mathbf{H}^2$ 上使得

$$(Ae_{j+1},\ e_{i+1})=(Ae_j,\ e_i)\quad (i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的一个算子；求证 A 是一个 Toeplitz 算子．对每一非负整数 n 考虑 $\mathbf{L}^2$ 上由

$$A_n=W^{*n}APW^n$$

给出的算子(如前，这里的 W 是双侧移位)．如果 $i,\ j\geqslant 0$，则

$$(A_n e_j,\ e_i)=(A_0 e_{j+n},\ e_{i+n})=(Ae_j,\ e_i).$$

即使对负的下标，类似上式的结论也是真的．的确，对充分大的 n，$j+n$ 和 $i+n$ 都是正的，而自此以后，$(A_0 e_{j+n},\ e_{i+n})$ 就与 n 无关．推论：如果 p 和 q 是三角多项式(诸 e_i，$i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ 的有限线性组合)，则序列 $\{(A_n p,\ q)\}$ 收敛．由于

$$\|A_n\|\leqslant\|A_0\|=\|A\|,$$

根据一个容易而一般的理由，得知 $\mathbf{L}^2$ 上的算子序列 $\{A_n\}$ 弱收敛于 $\mathbf{L}^2$ 上的一个算子 A_∞.

由于，对一切 i 和 j,

$$\begin{aligned}(A_\infty e_j,\ e_i) &= \lim_n\ (W^{*n}APW^n e_j,\ e_i)\\ &= \lim_n\ (W^{*n+1}APW^{n+1} e_j,\ e_i)\\ &= \lim_n\ (W^{*n}APW^n e_{j+1},\ e_{i+1})\\ &= (A_\infty e_{j+1},\ e_{i+1}),\end{aligned}$$

得知算子 A_∞ 有一个 Laurent 矩阵，从而它是一个 Laurent 算子（问题 193）. 如果 f 和 g 在 $\mathbf{H}^2$ 中，则

$$(PA_\infty f,\ g) = (A_\infty f,\ g) = \lim_n (W^{*n}APW^n f,\ g) = (Af,\ g),$$

因此对 $\mathbf{H}^2$ 中每一个 f 有 $PA_\infty f = Af$. 结论：A 是一个 Laurent 算子到 $\mathbf{H}^2$ 上的压缩，从而，依定义，A 是一个 Toeplitz 算子.

怎样从 A 的矩阵重新得到诱导 A 的函数 φ? 如果 $A = T_\varphi$，则 $A_\infty = L_\varphi$，所以 φ 的诸富里叶系数就是 A_∞ 的矩阵的 0 列的诸元素. 这是一个答案，但不是满意的答案；人们自然愿望有一个用 A 而不是用 A_∞ 来表述的答案. 这倒是容易的. 如果 $i,\ j \geqslant 0$，则

$$(Ae_j,\ e_i) = (A_\infty e_j,\ e_i) = (\varphi,\ e_{i-j});$$

这蕴涵 对 $i \geqslant 0$，$(\varphi,\ e_i) = (Ae_0,\ e_i)$

且 对 $j \geqslant 0$，$(\varphi,\ e_{-j}) = (Ae_j,\ e_0)$.

结论：φ 就是这样的一个函数，它的前进（即具有正下标）的富里叶系数是 A 的矩阵的 0 列的诸项而其后退的富里叶系数是该矩阵的 0 行的诸项.

为了证明系 1，试考察

$$(Ae_{j+1},\ e_{i+1}) = (AUe_j,\ Ue_i) = (U^*AUe_j,\ e_i).$$

为了证明系 2，试考察如果 φ 是有界可测函数，又 n 和 $n+k$ 是非负整数，则

$$(\varphi,\ e_k) = (T_\varphi e_n,\ e_{n+k}).$$

如果 T 是紧的，则 $\|T_\varphi e_n\| \to 0$（由于 $e_n \to 0$（弱））；由此得知对一切

k(正、负或 0), $(\varphi, e_k)=0$, 从而 $\varphi=0$.

解 195. 记 $C=T_\varphi T_\psi$ 并令 $\langle \gamma_{ij}\rangle$ 表示 C 的(不必假设它是 Toeplitz 的)矩阵. 如果 φ 和 ψ 的富里叶展开式是 $\varphi=\sum_i \alpha_i e_i$ 和 $\psi=\sum_j \beta_j e_j$, 因而 T_φ 和 T_ψ 的矩阵分别是 $\langle\alpha_{i-j}\rangle$ 和 $\langle\beta_{i-j}\rangle$, 则当 i, $j\geqslant 0$ 时恒有

$$\gamma_{i+1,j+1}=\gamma_{ij}+\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}.$$

证明是直捷的. 由于

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{i-k}\beta_{k-j},$$

得知
$$\begin{aligned}\gamma_{i+1,j+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{i+1-k}\beta_{k-j-1}\\&=\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{i+1-k}\beta_{k-j-1}\\&=\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{i-k}\beta_{k-j}\\&=\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}+\gamma_{ij}.\end{aligned}$$

如果现在 ψ 是解析的, 则对 $\mathbf{H}^2$ 中一切 f, 有

$$T_\varphi T_\psi f=T_\varphi(\psi\cdot f)=P(\varphi\cdot\psi\cdot f)=T_{\varphi\psi}f,$$

因此 $T_\varphi T_\psi=T_{\varphi\psi}$; 如果 φ^* 是解析的, 则

$$T_\varphi T_\psi=(T_{\psi^*}T_{\varphi^*})^*=T_{\varphi\psi}.$$

这证明了条件的充分性以及问题的最后断语. 反过来, 如果乘积 $T_\varphi T_\psi$ 是一个 Toeplitz 算子, 则它的矩阵是一个 Toeplitz 矩阵(问题 194); 关于 $\gamma_{i+1,j+1}$ 的方程于是蕴涵当 i, $j\geqslant 0$ 时恒有 $\alpha_{i+1}\beta_{-j-1}=0$. 从这个结果接着又推知, 不是对一切 $i\geqslant 0$ 有 $\alpha_{i+1}=0$ 必是对一切 $j\geqslant 0$ 有 $\beta_{-j-1}=0$, 而这又等价于所期望的结论.

说到定理的系, 充分性是显而易见的. 反过来, 如果 $T_\varphi T_\psi=0$, 则由于 0 是一个 Toeplitz 算子, 从问题 195 得知 φ^* 或 ψ 至少有一个是解析的且 $\varphi\psi=0$. 于是可以应用 F 和 M. Riesz 定理(问题 127)并且证明: 如果 φ^* 是解析的, 则 $\psi=0$; 如果 ψ 是解析的,

则 $\varphi=0$[注].

解 196. 从某些定性的分析开始是有助益的. 考虑一个 Laurent 矩阵,它是按通常的写法,当行向下降时,行下标增加(从 $-\infty$ 到 $+\infty$),而当列向右移时,列下标增加(从 $-\infty$ 到 $+\infty$). 把注意力固定于主对角线的任一特定的元素,并且注意从该元素开始向下、向右移所划出的那个单向无穷矩阵. 从一个固定的 Laurent 矩阵用这个方法得到的一切矩阵有相同的形状:它们看起来全都象相应的 Toeplitz 矩阵. 直观启示我们,当所选定的对角线元素向左上方移动时,所得的 Toeplitz 矩阵胀大而且趋向于原来的矩阵.

这情况可以有效地用一种非矩阵的方法描述如下. 如果 P_n 是到 $\{e_{-n}, \cdots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ 的张成空间上的投影, $n=1, 2, 3, \cdots$, 则每一个 Laurent 算子 L 是类似 Toeplitz 的算子 P_nLP_n 的强极限. 由于 $P_n=W^{*n}PW^n$, 又由于 W 与 L 可交换(因而 $WLW^*=L$), 得知当 $n\to\infty$ 时 $W^{*n}PLPW^n\to L$(强). 这蕴涵如果 T 是对应于 L 的 Toeplitz 算子,则 $W^{*n}TPW^n\to L$(强). 把这个结果与解 194 比较是有益的,在那里,弱收敛就已足够了.

基础已经准备好,现在可以着手证明 Toeplitz 算子的谱包含定理了. 只须证明,如果 0 是 L 的一个近似特征值,则它也是 T 的一个近似特征值;由一个明显的平移推理即可得到(关于)非 0 的值(的结果). 因此假设对每一正数 ε, 存在一个单位矢 f_ε 使得 $\|Lf_\varepsilon\|<\varepsilon$. 前段的结果蕴涵 $W^{*n}PW^nf_\varepsilon\to f_\varepsilon$ 且 $W^{*n}TPW^nf_\varepsilon\to Lf_\varepsilon$(强). 由此得知 $\|PW^nf_\varepsilon\|\to 1$ 且 $\|TPW^nf_\varepsilon\|<\varepsilon$ (n 充分大). 这两断语中,第一断语说对于大的 n, PW^nf_ε 几乎是一个单位矢;第二断语说 T 几乎把它映成 0. 由此知,如所预期, 0 是 T 的近似特征值.

系 1 现在可以简单地给予证明. 由于 L 是正规的, $\|L\|=r(L)$, 而据刚才证明的结果, $r(L)\leqslant r(T)$. 由此知 $\|L\|\leqslant\|T\|$, 反

[注] 此处应云:"如果 φ^* 是解析的,且不几乎处处等于 0, 则 $\psi=0$; 如果 ψ 是解析的且不几乎处处等于 0, 则 $\varphi=0$". ——译者注

向不等式以前已经证明，从已知的关于乘法的范数的事实即得系1.

关于系 2：如果 T_φ 的谱仅含点 0，则 L_φ 也是如此，而由此知 $\varphi=0$.

系 3 的证明与系 2 的相似：如果 T_φ 的谱是实的，则 L_φ 也是如此，而由此知 φ 是实的.

系 4 的证明与解 172 的证明同：$\overline{W(L)}=\text{conv}\Lambda(L)\subset \text{conv}\Lambda(T)\subset\overline{W(T)}\subset\overline{W(L)}$.

解 197. $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 是一个函数希耳伯特空间，为此，它有一个核函数(问题 30)．记起这些是有用的，这核函数是什么倒无关重要．设当 T_φ 从 $\mathbf{H}^2$ 被转移到 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 时变成 $\widetilde{T}_\varphi$；由解 34 知 $\widetilde{T}_\varphi\tilde{f}=\tilde{\varphi}\cdot\tilde{f}$ 对 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 中的每一 $\tilde{f}$ 成立．如果 y 是一个复(!)数，$|y|<1$，则 $\tilde{f}(y)=(\tilde{f},K_y)$；这蕴涵 $\tilde{f}(y)=0$ 当且只当 $\tilde{f}\perp K_y$．把 y 固定下来，置 $\lambda=\tilde{\varphi}(y)$，暂时固定一个 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 中的元素 $\tilde{f}$，并且令 $\tilde{g}$ 表示由 $\tilde{g}(z)=(\tilde{\varphi}(z)-\lambda)\tilde{f}(z)$ 定义的函数．由于 $\tilde{g}(y)=(\tilde{\varphi}(y)-\lambda)\tilde{f}(y)=0$，得知 $\tilde{g}\perp K_y$．这蕴涵 $(\widetilde{T}_\varphi-\lambda)\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 包含于 K_y 的正交补，因此它是 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 的一个真子空间，从而 λ 属于 T_φ 的(压缩)谱．结论：$\tilde{\varphi}(D)\subset\Lambda(T_\varphi)$，所以 $\overline{\tilde{\varphi}(D)}\subset\Lambda(T_\varphi)$.

逆命题更简单．如果当 $|z|<1$ 时，恒有 $|\tilde{\varphi}(z)-\lambda|\geqslant\delta>0$，则 $1/(\tilde{\varphi}-\lambda)$ 是开单位圆域上的有界解析函数．由此得知它与一个在该圆域内解析且泰劳系数集平方可和的函数的乘积是另一个具有同样性质的函数，就是说，它诱导出一个 $\widetilde{\mathbf{H}}^2$ 上的有界乘法算子．结论：$T_\varphi-\lambda$ 可逆，就是说，λ 不在 $\Lambda(T_\varphi)$ 中.

解 198. 不是倍乘算子的自伴 Toeplitz 算子没有特征值.

证．只须证明如果 φ 是一个实值有界可测函数，又对 $\mathbf{H}^2$ 中某一 f 有 $T_\varphi f=0$，则非 $f=0$ 即 $\varphi=0$．由于 $\varphi\cdot f^*=\varphi^*\cdot f^*\in\mathbf{H}^2$(因为 $P(\varphi\cdot f)=0$)，又由于 $f\in\mathbf{H}^2$，得知 $\varphi\cdot f^*\cdot f\in\mathbf{H}^1$ (问题 27)．可是由于 $\varphi\cdot f^*\cdot f$ 是实的，又知 $\varphi\cdot f^*\cdot f$ 是一个常数 (解 26)．由于 $\int\varphi\cdot f^*\cdot f\,d\mu=(\varphi\cdot f,f)=(T_\varphi f,f)=0$(因为 $T_\varphi f=0$)，这个常数

必是 0. F. 和 M. Riesz 定理(问题 127)蕴涵非 $f=0$ 即 $\varphi\cdot f^*=0$. 如果 $f\neq0$,则 f^* 只能在一个零测度的集上取值 0,所以 $\varphi=0$.

解 199. 如果 φ 是一个实值有界可测函数,又它的本性上界和下界是 α 和 β,则 $\Lambda(T_\varphi)$ 是闭区间 $[\alpha,\beta]$.

证. 如果 $\alpha=\beta$,则 φ 是常数,一切都是显而易见的. 如果 $\alpha<\lambda<\beta$,待证的是 $T_\varphi-\lambda$ 不可逆. 假定其反面成立,即 $T_\varphi-\lambda$ 可逆,则经过一个不涉实质的符号改变,可假定 $\lambda=0$. 由此知,作为可逆性的明显的小小推论,e_0 属于 T_φ 的值域,从而存在 $\mathbf{H}^2$ 中一个(非 0)函数 f 使得 $T_\varphi f=e_0$,其意即 $\varphi\cdot f-e_0\perp\mathbf{H}^2$. 等价地说(请记起对一切 z 有 $e_0(z)=1$)$\varphi\cdot f$ 的复共轭函数在 $\mathbf{H}^2$ 中;下一步是由此演绎出 $\operatorname{sgn}\varphi$ 是一个常数(因此 $\varphi>0$ 或 $\varphi<0$ 中必有一式几乎处处成立).

由于 φ 是实的,得知 $(\varphi\cdot f)^*=\varphi\cdot f^*$. 由于 $\varphi\cdot f^*$ 和 f 都在 $\mathbf{H}^2$ 中,问题 27 蕴涵 $\varphi\cdot f^*\cdot f\in\mathbf{H}^1$. 于是解 26 可以适用并由之得到 $\varphi\cdot f^*\cdot f$ 几乎处处等于一常数的信息. 由于 $f\neq0$,得知 f 几乎处处不等于 0(问题 127),从而 φ 几乎处处与 $\varphi\cdot f\cdot f^*$ 的常数的值同号.

用原来的记号表示,刚才得来的结果就是说 $\operatorname{sgn}(\varphi-\lambda)$ 是常数,又由于 $\alpha<\lambda<\beta$,这正是不可能的事. 这个矛盾证明了 $[\alpha,\beta]\subset\Lambda(T_\varphi)$.

反向不等式是容易的. 由于 $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$,得知 $\alpha\leqslant L_\varphi\leqslant\beta$;由于当 $f\in\mathbf{H}^2$ 时恒有 $T_\varphi f=PL_\varphi f$,得知 $(T_\varphi f,f)=(PL_\varphi f,f)=(L_\varphi f,f)$,从而 $\alpha\leqslant T_\varphi\leqslant\beta$. 这当然蕴涵 $\Lambda(T_\varphi)\subset[\alpha,\beta]$.

[译后注] 问题 137 的断语在一般巴拿哈空间中不能成立;紧算子不一定是有限秩算子的极限. 参看

P. Enflo, Acta Math., vol. 130(1973), pp. 309~317;

F. E. Alexander, Bull. London Math. Soc., vol. 6(1974), pp. 341~342.

——译者注

参 考 文 献

L. V. Ahlfors[1953], *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York.

N. I. Akheizer, I. M. Glazman[1961], *Theory of linear operators in Hilbert space*, Ungar, New York.

A. A. Albert, B. Muckenhoupt [1957], *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J., vol. 4, pp. 1~3.

T. Andô [1963], *On hypoonrmal operators*, Proc. A. M. S., vol. 14, pp. 290~291.

N. Aronszajn [1950], *Theory of reproducing kernels*, Trans. A. M. S., vol. 68, pp. 337~404.

N. Aronszajn, K. T. Smith [1954], *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. Math., vol. 60, pp. 345~350.

E. Asplund [1958], *A non-closed relative spectrum*, Arkiv för Mat., vol. 3, pp. 425~427.

F. V. Atkinson [1951], *The normal solubility of linear equations in normed spaces*, Mat. Sbornik, vol. 28, pp. 3~14.

S. K. Berberian[1959], *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. A. M. S., vol. 10, pp. 175~182.

S. K. Berberian [1962], *A note on hyponormal operators*, Pac. J. Math., vol. 12, pp. 1171~1175.

S. Bergman [1947], *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris.

A. R. Bernstein, A. Robinson [1966], *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pac. J. Math., vol. 16, pp. 421~431.

A. Beurling [1949], *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math., vol. 81, pp. 239~255.

G. Birkhoff, G. C. Rota[1960], *On the completeness of Sturm-Liouville expansions*, Amer. Math. Monthly, vol. 67, pp. 835~841.

E. Bishop [1957], *Spectral theory for operators on a Banach space*, Trans. A. M. S., vol. 86, pp. 414~445.

J. Bram [1955], *Subnormal operators*, Duke Math. J., vol. 22, pp. 75~94.

M. S. Brodskii [1957], *On a problem of I. M. Gelfand*, Uspekhi Mat. Nauk, vol. 12, pp. 129~132.

A. Brown [1953], *On a class of operators*, Proc. A. M. S., vol. 4, pp. 723~728.

A. Brown, P. R. Halmos [1963], *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J.

reine angew. Math., vol. 231, pp. 89~102.

A. Brown, P. R. Halmos, C. Pearcy [1965], *Commutators of operators on Hilbert space*, Can. J. Math., vol. 17, pp. 695~708.

A. Brown, P. R. Halmos, A. L. Shields [1965], *Cesaro operators*, Acta Szeged, vol. 26, pp. 125~137.

A. Brown, C. Pearcy [1965], *Structure of commutators of operators*, Ann. Math., vol. 82, pp. 112~127.

A. Brown, C. Pearcy [1966], *Multiplicative commutators of operators*, Can. J. Math., vol. 18, pp. 737~749.

L. de Branges, J. Rovnyak [1964], *The existence of invariant subspaces*, Bull. A. M. S., vol. 70, pp. 718~721.

L. de Branges, J. Rovnyak [1965], *Correction to "The existence of invariant subspaces"*, Bull. A. M. S., vol. 71, p. 396.

D. Deckard, C. Pearcy [1963], *Another class of invertible operators without square roots*, Proc. A. M. S., vol. 14, pp. 445~449.

W. F. Donoghue [1957 a], *On the numerical range of a bounded operator*, Michigan Math. J., vol. 4, pp. 261~263.

W. F. Donoghue [1957 b], *The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation*, Pac. J. Math., vol. 7, pp. 1031~1035.

N. Dunford, J. T. Schwartz [1958], *Linear operators., Part I: General theory*, Interscience, New York.

N. Dunford, J. T. Schwartz [1963], *Linear operators, Part II: Spectral theory*, Interscience, New York.

C. Foiaş [1963], *A remark on the universal model for contractions of G. C. Rota*, Com. Acad. R. P. Romîne, vol. 13, pp. 349~352.

J. M. Freeman [1965], *Perturbations of the shift operator*, Trans. A. M. S., vol 114, pp. 251~260.

B. Fuglede [1950], *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. N. A. S., vol. 36, pp. 35~40.

P. R. Halmos [1950 a], *Normal dilations and extensions of operators*, Summa Brasil., vol. 2, pp. 125~134.

P. R. Halmos [1950 b], *Measure theory*, Van Nostrand, Princeton.

P. R. Halmos [1951], *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea, New York.

P. R. Halmos [1952 a], *Spectra and spectral manifolds*, Ann. Soc. Pol. Math., vol. 25, pp. 43~49.

P. R. Halmos [1952 b], *Commutators of operators*, Amer. J. Math., vol. 74, pp. 237~240.

P. R. Halmos [1954], *Commutators of operators, II*, Amer. J. Math., vol. 76,

pp. 191～198.

P. R. Halmos [1958], *Finite-dimensional vector spaces*, Van Nostrand, Princeton.

P. R. Halmos [1961], *Shifts on Hilbert spaces*, J. reine angew. Math., vol. 208, pp. 102～112.

P. R. Halmos [1963 a], *A glimpse into Hilbert space*, Lectures on modern mathematics, vol. 1, Wiley, New York, pp. 1～22.

P. R. Halmos [1963 b], *What does the spectral theorem say?*, Amer. Math. Monthly, vol. 70, pp. 241～247.

P. R. Halmos [1964], *Numerical ranges and normal dilations*, Acta Szeged, vol. 25, pp. 1～5.

P. R. Halmos [1966], *Invariant subspaces of polynomially compact operators*, Pac. J. Math., vol. 16, pp. 433～437.

P. R. Halmos, S. Kakutani (1958), *Products of symmetries*, Bull. A. M. S, vol. 64, pp. 77～78.

P. R. Halmos, G. Lumer [1954], *Square roots of operators, II*. Proc. A. M. S., vol. 5, pp. 589～595.

P. R. Halmos, G. Lumer, J. J. Schäffer [1953], *Square roots of operators*, Proc. A. M. S., vol. 4, pp. 142～149.

P. R. Halmos, J. E. McLaughlin [1962], *Partial isometries*, Pac. J. Math., vol. 13, pp. 585～596.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya [1934], *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.

P. Hartman, A. Wintner [1950], *On the spectra of Toeplitz's matrices*, Amer. J. Math., vol. 72, pp. 359～366.

F. Hausdorff [1919], *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z., vol. 3, pp. 314～316.

E. Heinz [1952], *Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum*, Göttingen Nachr., pp. 5～6.

H. Helson [1964], *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York.

E. Hewitt, K. Stromberg [1965], *Real and abstract analysis*, Springer, New York.

E. Hille, R. S. Phillips [1957], *Functional analysis and semi-groups*, A. M. S., Providence.

K. Hoffman [1962], *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

T. Itô [1958], *On the commutative family of subnormal operators*, J. Fac. Sci., Hokkaido University, vol. 14, pp. 1～15.

K. Jacobs [1960], *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Springer,

Berlin.

N. Jacobson [1935], *Rational methods in the theory of Lie algebras*, Ann. Math. vol. 36, pp. 875~881.

R. V. Kadison [1951], *Isometries of operator algebras*, Ann. Math., vol. 54, pp. 325~338.

G. K. Kalisch [1957], *On similarity, reducing manifolds and unitary equivalence of certain Volterra operators*, Ann. Math., vol. 66, pp. 481~494.

I. Kaplansky [1953], *Products of normal operators*, Duke Math. J., vol. 20, pp. 257~260.

T. Kato [1965], *Some mapping theorems for the numerical range*, Proc. Japan Acad., vol. 41, pp. 652~655.

J. L. Kelley [1955], *General topology*, Van Nostrand, Princeton.

D. C. Kleinecke [1957], *On operator commutators*, Proc. A. M. S., vol. 8, pp. 535~536.

P. D. Lax [1959], *Translation invariant spaces*, Acta Math., vol. 101, pp. 163~178.

A. Lebow [1963], *On von Neumann's theory of spectral sets*, J. Math. Anal. Appl., vol. 7, pp. 64~90.

K. Löwner [1939], *Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Raume*, Ann. Math., vol. 40, pp. 816~833.

W. Mlak [1965], *Unitary dilations of contraction operators*, Rozprawy Mat., vol. 46.

B. Sz.-Nagy [1953], *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*, Acta Szeged, vol. 15, pp. 87~92.

B. Sz.-Nagy [1955], *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Appendix to "Leçons d'analyse fonctionelle" by F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Akàdémiai Kiadó Budapest. ([1960], *Extensions of linear transformations in Hilbert space which extend beyond this space*, Appendix to "Functional analysis" by F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Ungar, New York).

B. Sz.-Nagy [1957], *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II.*, Acta Szeged, vol. 18, pp. 1~14.

B. Sz.-Nagy, C. Foiaş [1962], *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales*, Acta Szeged, vol. 23, pp. 106~129.

B. Sz.-Nagy, C. Foiaş [1964], *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sousespaces invariants*, Acta Szeged, vol. 25, pp. 283~316.

B. Sz.-Nagy, C. Foiaş [1966], *On certain classes of power-bounded operators in Hilbert space*, Acta Szeged, vol. 27, pp. 17~25.

N. K. Nikolskii [1965], *Invariant subspaces of certain completely continuous*

operators, Vestnik Leningrad Univ., pp. 68～77.

C. Pearcy [1965], *On commutators of operators on Hilbert space*, Proc. A. M. S., vol. 16, pp. 53～59.

C. Pearcy [1966], *An elementary proof of the power inequality for the numerical radius*, Mich. Math. J., vol. 13, pp. 289～291.

C. R. Putnam [1951 a], *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math., vol. 73, pp. 127～131.

C. R. Putnam [1951 b], *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math., vol. 73, pp. 357～362.

W. T. Reid [1951], *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. J., vol. 18, pp. 41～56.

F. Riesz, B. Sz.-Nagy [1943], *Ueber Kontraktionen des Hilbertschen Raumes*, Acta Szeged, vol. 10, pp. 202～205.

F. Riesz, B. Sz.-Nagy [1952], *Leçons d'analyse fonctionelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest. ([1955], *Functional analysis*, Ungar, New York.)

C. E. Rickart [1960], *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, Princeton.

J. R. Ringrose [1962], *On the triangular representation of integral operators* Proc. London Math. Soc., vol. 12, pp. 385～399.

J. B. Robertson [1965], *On wandering subspaces for unitary operators*, Proc. A. M. S., vol. 16, pp. 233～236.

M. Rosenblum [1958], *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math., Soc., vol. 33, pp. 376～377.

G. C. Rota [1960], *On models for linear operators*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 13, pp. 469～472.

L. A. Sakhnovich [1957], *On the reduction of Volterra operators to the simplest form and on inverse problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, vol. 21, pp. 235～262.

D. Sarason [1965], *A remark on the Volterra operator*, J. Math. Anal Appl., vol. 12, pp. 244～246.

H. H. Schaefer [1963], *Eine Bemerkung zur Existenz invarianter Teilräume linearer Abbildungen*, Math. Z., vol. 82, p. 90.

J. J. Schäffer [1955], *On unitary dilations of contractions*, Proc. A. M. S., vol. 6, p. 322.

J. J. Schäffer [1965], *More about invertible operators without roots*, Proc. A. M. S., vol 16, pp. 213～219.

R. Schatten [1960], *Norm ideals of completely continuous operators*. Springer, Berlin.

M. Schreiber [1956], *Unitary dilations of operators*, Duke Math. J., vol. 24, pp. 579～594.

J. Schur [1917], *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt*

sind, J. reine angew. Math., vol. 147, pp. 205～232.

I. E. Segal [1951], *Equivalences of measure spaces*, Amer. J. Math., vol. 73, pp. 275～313.

I. E. Segal [1965], *Algebraic integration theory*, Bull. A. M. S., vol. 71, pp. 419～489.

F. V. Shirokov [1956], *Proof of a conjecture of Kaplansky*, Uspekhi Mat. Nauk, vol. 11, pp. 167～168.

K. Shoda [1936], *Einige Satze über Matrizen*, Japanese J. Math., vol. 13, pp. 361～365.

J. G. Stampfli [1962], *Hyponormal operators*, Pac. J. Math., vol. 12, pp. 1453～1458.

J. G. Stampfli [1965], *Perturbations of the shift*, J. London Math. Soc., vol. 40, pp. 345～347.

M. H. Stone [1932], *Linear transformatins in Hilbert space and their applications to analysis*, A. M. S., New York.

R. C. Thompson [1958], *On matrix commutators*, J. Wash. Acad. Sci., vol. 48, pp. 306～307.

O. Toeplitz [1910], *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen*, Göttingen Nachr., pp. 489～506.

O. Toeplitz [1918], *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér*, Math. Z., vol. 2, pp. 187～197.

F. A. Valentine [1964], *Convex sets*, McGraw-Hill, New York.

J. von Neumann [1929], *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., vol. 102, pp. 370～427.

J. von Neumann [1932], *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. N. A. S., vol. 18, pp. 70～82.

J. von Neumann [1936], *On regular rings*, Proc. N. A. S., vol. 22, pp. 707～713.

J. von Neumann [1950], *Functional operators*, Princeton University Press, Princeton.

J. von Neumann [1951], *Eine Spektraltheorie für allgeemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr., vol. 4, pp. 258～281.

H. Widom [1960], *Inversion of Toeplitz matrices, II*, Ill. J. Math., vol. 4, pp. 88～99.

H. Widom [1964], *On the spectrum of a Toeplitz operator*, Pac J. Math., vol. 14, pp. 365～375.

N. A. Wiegmann [1948], *Normal products of matrices*, Duke Math. J., vol. 15, pp. 633～638.

N. A. Wiegmann [1949], *A note on infinite normal matric*, Duke Math. J., vol. 16, pp. 535～538.

H. Wielandt [1949], *Ueber die Unbeschränktheit der Operatoren des Quantenmechanik,* Math. Ann., vol. 121, p. 21.

A. Wintner [1929], *Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen,* Math. Z., vol. 30, pp. 228～282.

A. Wintner [1947], *The unboundedness of quantum-mechanical matrices,* Phys. Rev., vol. 71, pp. 738～739.

索 引

一 画

二 画

三 画

四 画

五 画

六　画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

其 他